TD 25. Séries numériques.

Exercices de base

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1°) $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

2°) $u_n = \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

3°) $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$

4°) $u_n = ne^{-n}$

5°) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}-1}$

6°) $u_n = e^{-\sqrt{\ln n}}$

7°) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

8°) $u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$

9°) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}(1+n)^2}$

10°) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2 \ln^3 n}$

11°) $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

12°) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ (majorer u_n)

Exercice 2. Montrer que la série de terme général u_n converge, et calculer la somme de la série :

a) $u_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ b) $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ c) $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n!}$

Exercices (un peu) plus avancés

Exercice 3. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$ converge si et seulement si $\alpha \neq 1$.

b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 4. Nous avons vu en cours que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
À l'aide d'un DL, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n \sin(n)}$ est convergente.

Exercice 5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge. Calculer alors sa somme.

Exercices théoriques

Exercice 6. Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs. Montrer que $\sum u_n^2$ est convergente.

Exercice 7. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive.
Montrer que les séries de terme général u_n, $\dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $\ln(1+u_n)$ sont de même nature.

Exercice 9. a) Montrer que pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.
b) Soit $(u_n)_n$ une suite positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{2n}}$ converge.