TD 21. Analyse asymptotique.

Exercice 1. *Attention aux idées fausses* On pose $f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

a) Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$. Qu'est-ce que cela signifie en termes de DL ? Qu'en déduire ?

b) Montrer que, pourtant, f n'est pas deux fois dérivable en 0, et que f' n'admet pas de DL à l'ordre 1 en 0.

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Calculer, si cette limite existe :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 3. Déterminer les DL des fonctions f suivantes à l'ordre et au point demandés.

a) $\dfrac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x + 1}$ en 0 à l'ordre 2 b) $\dfrac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$ en 0 à l'ordre 2

c) $\dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ en 1 à l'ordre 2 d) $\exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en 0 à l'ordre 2

e) $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ en 0 à l'ordre 10 f) $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ en 0 à l'ordre 2

Exercice 4. En utilisant le lien entre $\tan'$ et $\tan$, retrouver le DL à l'ordre 3 en 0 de $\tan$.

Exercice 5. Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & J \\ x & \mapsto & xe^x. \end{array}$

a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Montrer que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

b) Déterminer le DL_3 en 0 de f^{-1}.

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple de :

a) $u_n = -\sqrt{n} + \cos\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \ln(n^2)$

b) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n+2)$

c) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

d) $u_n = n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$

e) $u_n = \sqrt[3]{8n^3+1} - 2n$

f) $u_n = \ln(n^2 - 3n + 2)$

Exercice 7. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes, au voisinage du point donné :

a) $\dfrac{x^3 + 1 - \cos x}{(x^2 - 2x)\tan(3x)}$, $x = 0$

b) $\dfrac{\sin(x \ln x)}{x}$, $x = 0$

c) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$, $x = 0$ et $x = +\infty$

d) $\dfrac{\ln\cos(3x)}{\sin^3(2x)}$, $x = 0$

e) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$, $x = +\infty$

f) $x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$, $x = +\infty$

g) $\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x} - 1}{\mathrm{Arcsin}\, x}$, $x = 0$

h) $x(2+\cos x) - 3\sin x$, $x = 0$

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de (u_n) :

a) $u_n = \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$, où $t>0$

b) $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+n+2}}$

c) $u_n = n\left(\cos\frac{1}{n} - \ln(e+\frac{1}{n})\right)$

d) $u_n = \dfrac{\ln\left(\cos(\frac{a}{n})\right)}{\ln\left(\cos(\frac{b}{n})\right)}$, ($a$ et b non nuls)

Exercice 9. Calculer la limite de f au point donné :

a) $\ln x.\ln(1+\ln(1+x))$, $x=0$

b) $\dfrac{\ln\left(\sin^2 x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$, $x=\frac{\pi}{2}$

c) $\dfrac{1}{x^2}(e^{\cos x-1}-1)$, $x=0$

d) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$, $x=e$

e) $(\sin x)^{\ln(x-\frac{\pi}{2})}$, $x=\frac{\pi}{2}^+$

f) $\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, $x=0$

Exercice 10. On pose, pour tout $x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$.
Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

"Revisions" : applications déjà vues des DL

Exercice 11. On pose, pour tout $x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$, et déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 12. On pose $f : x\mapsto \dfrac{2x^2-1}{x} - x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
Déterminer le domaine de définition de f.
Montrer que la courbe de f admet des asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$, et étudier la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.