TD 20. Esperance, Variance.

Exercice 1. Un enseignant pose une question à ses n élèves. Il y a 2 élèves qui savent la réponse, mais l'enseignant ne sait pas lesquels ; les $n-2$ autres ne savent pas la réponse. L'enseignant interroge ses élèves un à un, au hasard.
On note X la variable aléatoire égale au rang du premier élève capable de donner la bonne réponse.
1) Déterminer la loi de X, son espérance.
2) On note Y la variable aléatoire égale au rang du second élève capable de donner la bonne réponse. Par une considération de symétrie, montrer que $n+1-Y$ a même loi que X. En déduire $E(Y)$.

Exercice 2. Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par α avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou par β avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$. On note S la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n.
Déterminer l'espérance et la variance de S.
Indication : on pensera à introduire une autre variable qui suit une loi usuelle.

Exercice 3. Soient $X_1, \dots, X_m$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On pose $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

1°) Calculer, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

2°) On suppose désormais que $m = 2$.
On a donc $Y = \max(X_1, X_2)$, et on pose également $Z = \min(X_1, X_2)$.

a) Calculer $E(Y)$.

b) Sans déterminer la loi de Z, déterminer $E(Z)$.

c) Presque sans calculs, déterminer $E(YZ)$.

d) Calculer $\text{cov}(Y, Z)$. Qu'en déduire ?

Exercice 4. 1) Montrer que si les entiers k, l et n vérifient $0 \leq l \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$

2) On dispose d'une urne contenant une proportion $p \in]0;1[$ de boules blanches et d'une pièce donnant pile avec la probabilité $a \in]0;1[$.
On tire n boules de l'urne avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Lorsqu'on obtient k boules blanches ($k \in \mathbb{N}$), on lance k fois la pièce et on note Y le nombre piles obtenus.

a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n ; l'urne numérotée k contient k boules, elles-mêmes numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule de cette urne.
On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.
1) Déterminer l'espérance de Y.
2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

— **Méthode 1 :** On analyse le sang de chacune des N personnes.

— **Méthode 2 :** On regroupe la population en g groupes de n individus. On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1°) Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?

2°) Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n, p.

3°) Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000, n = 100, p = 0,01$.

Exercice 7. Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables, qui contiennent chacune n places ($50 < n < 100$).
A l'aide de l'inégalité de Bienanymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 8. On reprend l'exercice 15 du TD 19. Calculer $\text{cov}(X, N)$. Commentaire ?