TD 14. Espaces vectoriels et applications linéaires.

Exercice 1. Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
Quand c'est possible, donner une famille génératrice de F.

a) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\}$ pour $E = \mathbb{R}^2$

b) $F = \{(a+b, -a, 2a-b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ pour $E = \mathbb{C}^3$

c) $F = \{(a, -a, 1-a) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ pour $E = \mathbb{R}^3$

d) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$ pour $E = \mathbb{C}^3$

e) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = 0 \text{ et } x - y + 2z + t = 0\}$ pour $E = \mathbb{R}^4$

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ x \neq y\}$ pour $E = \mathbb{C}^2$

g) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y & x-y \\ 2y & -x+y \end{pmatrix} \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

h) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ / \ x+y+z-2t = 0 \right\}$ pour $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

i) $F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \right\}$ pour $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

j) $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n) \text{ diverge } \}$ pour $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

k) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(0) = 0\}$ pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

l) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(0) = 1\}$ pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

m) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \ / \ f \text{ croissante}\}$ pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$

Exercice 2. 1) Dans l'ev E considéré, déterminer si C est combinaison linéaire de A et B :

a) Dans $E = \mathbb{R}^3$, $A = (1,1,2)$, $B = (3,0,1)$ et $C = (5,2,5)$.

b) Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $A : x \mapsto \cos x$, $B : x \mapsto \sin x$ et $C : x \mapsto \cos(2x)$.

c) Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $A : x \mapsto x+1$, $B : x \mapsto x-1$ et $C : x \mapsto |x|$.

2) On reprend l'exemple a). Montrer l'égalité de $\text{Vect}(A,B)$, de $\text{Vect}(A,B,C)$ et de $\text{Vect}(B,C)$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergentes de limite nulle.

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) Montrer que F et G sont en somme directe. Déterminer $F \oplus G$.

Exercice 4. Soit, dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, F (resp. G) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires).

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 5. Soient, dans $E = \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$F = \{f \in E \ / \ f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+y \end{array}$

b) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, x+y-z) \end{array}$

c) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y-1, 2x-y) \end{array}$

d) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+2y^2 \end{array}$

e) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,x^2) \end{array}$

f) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$

g) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f+f' \end{array}$

h) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & |f| \end{array}$

i) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM-MA \end{array}$
où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est fixée

Exercice 7. a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f : (x,y) \mapsto (x-y, 2x-2y)$.
Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

b) Même question avec l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ suivant : $f : (x,y,z) \mapsto (2y+z, x+z, -x+y+z)$.

Exercice 8. On considère $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+i\overline{z}. \end{array}$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$, puis déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
On définit $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & [x \mapsto xf(x)] \,. \end{array}$

a) Laquelle de ces deux notations a un sens : $u(f)(x)$ ou $u(f(x))$? Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que u est injective.

Exercice 10. Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$
b) Montrer : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f) \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$, et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.
En déduire une CNS pour que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g$ soient supplémentaires dans F.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E.

a) Montrer que si f et g commutent alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

b) Montrer que dans le cas où f est un projecteur, la réciproque est vraie.

Exercice 12. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,x). \end{array}$
Montrer que f est une projection ; déterminer les sous-espaces vectoriels associés à cette projection, et le projecteur associé à f.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n respectivement symétriques et antisymétriques sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et qu'ils sont supplémentaires.
Déterminer la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14. On définit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x=y=z\}$.

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit p la projection sur F parallèlement à G, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $p(x,y,z)$ et $s(x,y,z)$ en fonction de x, y, z.

Exercice 15. Soient p et q des projecteurs d'un espace vectoriel E.

a) Montrer que $p+q$ projecteur $\iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff p \circ q = q \circ p = 0$.

b) On suppose que $p+q$ est un projecteur.
Montrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel et f, g des endomorphismes de E. Montrer :

$$f \circ g = f \quad \text{et} \quad g \circ f = g \iff f \text{ et } g \text{ sont des projecteurs de même noyau.}$$