TD 11. Limites et continuité.

Exercice 1. *VRAI ou FAUX ?*

a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f croît au voisinage de $+\infty$.

b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ alors $f \leq g$ au voisinage de a.

c) Si f a une limite finie en a et si g n'a pas de limite en a alors $f+g$ n'a pas de limite en a.

d) Si f a une limite infinie en a et si g n'a pas de limite en a alors $f+g$ n'a pas de limite en a.

e) Si f et g ne sont pas continues en a alors $f+g$ non plus.

f) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement positive, alors $\exists\, c>0,\ \forall\, x\in[a,b],\ f(x)\geq c$.

g) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.

h) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

i) L'image d'un intervalle borné par une fonction continue est un intervalle borné.

Exercice 2. Calcul des limites suivantes :

1°) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(x\ln x)}{x}$

2°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

3°) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x}{x+\cos x}$

5°) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

6°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3(\ln x)^2e^{-x}$

7°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right)$

8°) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\tan(2x)$

9°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

Exercice 3. Montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique et non constante n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 4. Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ de $f : x\mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

Exercice 5. On pose : $f : x\mapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$.

a) Donner le domaine de définition et de continuité de f.

b) Peut-on prolonger f par continuité ?

Exercice 6. Montrer que $f : \begin{array}{ccc}]0,\frac{\pi}{4}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\tan x)^{\tan(2x)} \end{array}$ est bien définie et qu'elle est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue en 0, et telle que : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(2x)+f(x)=0$.

a) Que vaut $f(0)$?

b) Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ f(x_0)=(-1)^n f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

c) En déduire que f est constante.

Exercice 8. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.

a) Que vaut $f(0)$? Montrer que f est impaire.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(nx)=nf(x)$.

c) Notons $a=f(1)$. Exprimer, pour tout $x\in\mathbb{Q}$, $f(x)$ en fonction de x et de a.

d) En déduire f.

Exercice 9. Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure durant lequel il parcourt exactement 15 km.
Indication : introduire la fonction $d : [0;1] \to \mathbb{R}$ qui, à $t \in [0;1]$ (temps exprimé en heure), associe la distance $d(t)$ parcourue (en km) entre l'instant 0 et l'instant t.

Exercice 10. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$, continue. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\exists\, x_0 \in [0,1],\ f(x_0) = (1-x_0)^n$.

b) Montrer l'unicité dans le cas où f est croissante.

Exercice 11. Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 - 2f(x) - 1 = 0$$

Exercice 12. Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.
a) Montrer que f est bornée.
b) f atteint-elle ses bornes ?

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(\sin x)}{x} = 0$.