TD 9. Introduction aux développements limités.

Exercice 1. « Nettoyer » les expressions suivantes :

1°) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}$

2°) $f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln x + x^2 + o(x^2) + 4 - 5x + o(x)$

Exercice 2.

1°) Classer par ordre de négligeabilité (chaque suite doit être négligeable devant la suivante) :

$$n!\ ;\ n^{0,1}\ ;\ n^2\ ;\ e^n\ ;\ (\ln n)^{12}\ ;\ \sqrt{n}\ln n\ ;\ 5^n$$

2°) Même exercice avec : $\dfrac{1}{n^2}$; $\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{\ln n}{n^2}$; $\dfrac{\ln n}{n}$; $\dfrac{1}{n\ln n}$; $\sqrt{\ln n}$; 2 ; $(\ln 2)^n$

Exercice 3. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x+2x^2}$. Déterminer : **1)** le $DL_1(0)$ de f ; **2)** le $DL_2(0)$ de f.

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 de f à l'ordre n demandé :

1°) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$, $n = 2$

2°) $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$, $n = 3$

3°) $f(x) = (\ln(1+x))^2$, $n = 4$

4°) $f(x) = e^{\cos x}$, $n = 2$

5°) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$, $n = 4$

6°) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 2$

7°) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$, $n = 2$

Exercice 5. Déterminer le développement limité de f à l'ordre n demandé, au point a demandé :

1°) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$, $n = 2$

2°) $f(x) = \sin(\pi\cos x)$, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $n = 2$

Exercice 6. Calculer, si elle existe, la limite de la fonction f au point demandé :

1°) $f(x) = x - x^2\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$

2°) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ en $+\infty$

3°) $f(x) = \dfrac{x\ln(x) - x + 1}{1 - x + \ln x}$ en 1

4°) $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin(5x)}{\sin x + \sin(5x)}$ en 0

5°) $f(x) = x\left(\operatorname{Arctan} x - \dfrac{\pi x + 1}{2x+1}\right)$ en $+\infty$

Exercice 7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.
Montrer qu'il existe des réels a, b que l'on déterminera tels que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \dfrac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 8. On pose, pour tout $x \geq 1, f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$. Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera tels que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
Donner une interprétation graphique.

Exercice 9. Montrer, dans chacun des cas suivants, que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

1°) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

2°) $f(x) = (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$