TD 6. Equations différentielles linéaires.

Ordre 1

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles ou problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' + y = 2e^{-x}$

b) $(1+x^2)y' - xy = x$

c) $y' - y\tan x = \sin x \quad$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d) $\begin{cases} (x+1)y' - xy + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ sur $]-1, +\infty[$

e) $xy' - 2y = -\ln x$

f) $xy' + y = xe^{\frac{x^2}{2}}$

Exercice 2. (Équation fonctionnelle)
On cherche à déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$(*) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

1) Soit f une fonction vérifiant $(*)$.
   a) Déterminer f dans le cas où $f(0) = 0$.
   b) On suppose $f(0) \neq 0$. Montrer que $f(0) = 1$.
   c) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire f dans le cas où $f(0) \neq 0$.
2) Conclure.

Exercice 3. (Équation faisant intervenir une intégrale)
Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - 1 = \int_0^x tf(t)\,dt.$$

1) Soit f une solution.
   a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle à préciser.
   c) En déduire la forme de f.
2) Conclure.

Ordre 2

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles ou problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y' + y = x^2 + e^{-x}$ b) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$

c) $y'' - 2y' + y = e^x + \cos x$ d) $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}\sin(x)$.

Exercice 5. (Changements de fonction inconnue)
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$(E) \ : \ x^2y'' + 3xy' + y = 1 + x^2$$

1°) *Première méthode* :

a) Pour toute fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = xy(x).$$

Déterminer une équation différentielle (E_1) telle que :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

b) Résoudre (E_1) puis (E).

2°) *Deuxième méthode* :

a) Pour toute fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t).$$

(Il s'agit bien d'un changement de fonction inconnue, mais un physicien dirait "on change de variable en posant $t = \ln x$").
Déterminer une équation différentielle (E_2) telle que :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow z \text{ solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

b) Résoudre (E_2) puis (E).

Exercice 6. (Systèmes différentiels)

a) Déterminer les fonctions dérivables x et y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Indication : supposer x solution et trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par x.

b) Déterminer les fonctions deux fois dérivables x et y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x''(t) = 3x(t) - 4y'(t) \\ y''(t) = 3y(t) + 4x'(t) \end{cases}$$

Indication : poser la fonction $z = x + iy$.