TD 4. Complexes.

Exercice 1. Soient z et z' des complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 2. Résoudre $|z-1| = |z+3|$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

Exercice 4. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, montrer : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.
Interpréter géométriquement cette relation (Identité du parallélogramme).

Exercice 5. Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique (où θ est dans $[0, 2\pi]$) :

$$z_1 = 2i - 2\sqrt{3} \quad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}i - 1} \quad z_3 = \left(\frac{1-3i}{i-2}\right)^{11} \quad z_4 = 2ie^{i\theta}$$

$$z_5 = -e^{i\frac{\pi}{4}}\ ;\ z_6 = \sin(\theta)\ ;\ z_7 = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)\ ;\ z_8 = i - e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 6. On pose $z_1 = 3 + 3i$ et $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$.
Déterminer les formes algébrique et trigonométrique de $z = \frac{z_1}{z_2}$; en déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des entiers n tel que $(1+i)^n$ soit réel.

Exercice 8. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$, et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

a) Montrer que $B = \overline{A}$ et que $\mathrm{Im}(A) > 0$.
b) Calculer $A + B$ et AB, en déduire A et B.

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, une racine 5ème de l'unité, distincte de 1.
Montrer que $(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^4 + \alpha + 1) = \alpha(\alpha + 1)$.

Exercice 10. Linéariser $\sin^2 x \cos^3 x$.

Sommes

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$, et a, b des réels. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(ak+b)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(ak+b)$.
Application : calculer $S = \cos(\dfrac{\pi}{11}) + \cos(\dfrac{3\pi}{11}) + \cos(\dfrac{5\pi}{11}) + \cos(\dfrac{7\pi}{11}) + \cos(\dfrac{9\pi}{11})$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer les sommes suivantes :
$S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$ (on montrera que c'est un réel) ; $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $\theta \in \mathbb{R} \backslash \{k\frac{\pi}{2}\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta}$.

Équations

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
a) $2z + 6\overline{z} = 3 + 2i$. b) $z + \overline{z} + j(z+1) + 2 = 0$.

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{a) } z^4 = -7 - 24i \qquad \text{b) } z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$$

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$
b) $3z^2 + 2(1-3m)z + 3m^2 = 0$ où m paramètre réel
c) $z^2 - 2(1+\cos(\phi))z + 2(1+\cos(\phi)) = 0$ où ϕ paramètre réel
d) $z^6 - z^3 + i + 1 = 0$
e) $7z^3 - (14+2i)z^2 + (14+4i)z - 4i = 0$ sachant qu'une solution est imaginaire pure
f) $(z^3+1)^2 = (z+1)^6$ (indication : factoriser le membre de gauche)

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $(z-1)^n = z^n$ où $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 2 est fixé
b) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = -1$
c) $z^{2n} - 2\cos(n\theta)z^n + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 2 et $\theta \in \mathbb{R}$ fixés
d) $e^{iz} = 1 - i$

Géométrie et complexes

Exercice 18. Dans chacun des cas suivants, préciser la région du plan complexe des points d'affixe z vérifiant la condition indiquée (a désigne un réel fixé) :

a) $1 + |z| \leq a$; b) $|1+z| = 4$; c) $0 \leq 1 \leq |i - z| \leq 2$;
d) $|z| = |1-z| = 1$; e) $z = re^{i\frac{2\pi}{5}}$, $r \in [0,2]$; f) $z = 3e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 19. Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose $Z = \dfrac{z+2}{z+1}$.
En raisonnant géométriquement, déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :
a) $Z \in \mathbb{R}$
b) $Z \in i\mathbb{R}$
c) $|Z| = 1$.

Exercice 20. Déterminer les points M d'affixe complexe z tel que, si A est d'affixe 1 et N d'affixe $1 + z^2$, les trois points N, A, M sont alignés.

Exercice 21. Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b et c.
a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + j^2c = 0$.
b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.