TD 1. Analyse : généralités.

Exercice 1. a) Montrer que, pour tous réels x, y : $2xy \leq x^2 + y^2$.
b) En déduire que, pour tous réels a, b, c : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Exercice 2. À l'aide de l'inégalité triangulaire et sans faire de cas selon le signe des quantités qui apparaissent, montrer que pour tous réels x et y :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

Exercice 3. Simplifier, pour tous réels a et b tels que $a \geq b \geq 0$, la quantité suivante :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}.$$

Exercice 4. Montrer que l'expression $x^4 - 3x^2 + 2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et le calculer.

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(2n+3)\sqrt{n+1} \leq (2n+1)\sqrt{n} + 3\sqrt{n+1}.$$

Exercice 6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 7. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = 1$ b) $|2x-4| \leq |x-1|$
c) $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$ d) $x - \sqrt{x} - 2 \geq 0$

Exercice 8. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$.

Exercice 9. On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$.
Montrer, sans étude de fonction, que pour tout $x \in [\sqrt{2}, 2]$, $f(x) \in [\sqrt{2}, 2]$.
Indication : On pourra traduire le résultat à montrer par deux inégalités à démontrer.

Exercice 10. Soient x et y des réels de $]-1, 1[$.
a) Montrer que $-1 < xy < 1$.
b) Montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$.
Indication : On pourra étudier, pour y fixé, la fonction $f_y \,:\, t \mapsto \dfrac{t+y}{1+ty}$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$.

1°) Déterminer le domaine de définition D de f, puis dresser son tableau de variations.

2°) Simplifier, pour tout $x \in D$, l'expression $f(x) - 2x$.
En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x$ et interpréter graphiquement.

3°) Tracer la courbe de f.

Exercice 12. Factoriser : $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition de f, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.

1°) $f(x) = \ln(\ln x)$

2°) $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.

3°) $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$

4°) $f(x) = x^x$ (à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$)

5°) $f(x) = x^{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 14. On pose $f(x) = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$. Déterminer le domaine de définition de f et simplifier $f(x)$.

Exercice 15. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $\ln \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$ b) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

c) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ d) $\ln|x-1| \; - \; 2\ln|x| \; + \; \ln|x+1| < 1$

Exercice 16. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \ln(x)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(x)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(\ln x)^3}{x^4}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{e^{\sqrt{x}}}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} - e^x$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x . \ln(\ln x)}{x}$

Exercice 17. Pour quels réels x peut-on écrire $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$?

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\cos x = \sin x$ b) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(2x) = \cos(x) - \sin(x)$ d) $2\sin^2(x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 3$

e) $\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x = 0$

Exercice 19. (Entraînement) Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$ b) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$

c) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$ d) $\sin(2x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

e) $\cos(3x) + \sin(x) = 0$ f) $3\tan(x) = 2\cos(x)$

g) $2\cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$ h) $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$

Exercice 20. Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \leq 0$ b) $\cos x - \cos(2x) \geq 0$

Exercice 21. On pose, pour tout réel x, $f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$.

1°) Calculer $f(\pi - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Justifier alors qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2°) Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

3°) Tracer la courbe représentative de f.