Programme de la semaine 26 (du 05/05 au 11/05).

Matrices, déterminants

Reprise avec en plus :

- Définition du déterminant d'une matrice comme l'unique forme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n-linéaire et anti-symétrique par rapport aux colonnes et qui envoie I_n sur 1. Propriétés : cas de deux colonnes identiques, d'une colonne nulle, déterminant de $\lambda.A$, de A^T, effet des opérations élémentaires. Développement par rapport à une ligne, à une colonne. Cas d'une matrice triangulaire ou diagonale. Déterminant d'un produit, traduction de l'inversibilité et déterminant de l'inverse.

Ensembles finis, dénombrement : COURS UNIQUEMENT

- Ensembles finis, cardinal (définition intuitive, propriétés admises).
- Cardinal d'une réunion disjointe, du complémentaire, d'une différence et d'une réunion de deux ensembles, d'un produit cartésien, de $\mathcal{P}(E)$.
- Dénombrement : définition et nombre de p-listes, de p-arrangements, de permutations, de p-combinaisons d'un ensemble fini.

Décomposition en éléments simples

⚠ La notion formelle de fraction rationnelle n'est pas au programme de PTSI.
L'objectif est uniquement calculatoire ; on admet le théorème suivant :

Si $f : x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ avec : $\deg(A) < \deg(B)$, $B = (X - x_1)\dots(X - x_p)$ avec les x_k 2 à 2 distincts, alors $\exists\,!(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{x_1, \dots, x_p\}$, $f(x) = \dfrac{a_1}{x - x_1} + \dots + \dfrac{a_p}{x - x_p}$.

Questions de cours

Demander :

— une définition ou un énoncé du cours ;

— une petite décomposition en éléments simple dans le cadre du programme (fonctions rationnelles à pôles simples de degré < 0).

— et l'une des démonstrations suivantes :

- Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E ; F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{C}$ une base de E, avec $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  u est bijective ssi $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(u)$ est inversible, expression de la matrice de u^{-1} dans ce cas.
- Calcul de $\det(A - \lambda I_3)$ directement sous forme factorisée, pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
- Preuve combinatoire de : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (bien introduire p et n).

Semaine suivante de colle : Matrices, déterminants, dénombrement.