Programme de la semaine 24 (du 07/04 au 13/04).

Espaces vectoriels de dimension finie

- Famille génératrices ; libres, liées. Cas particulier des familles d'un vecteur, de deux vecteurs. Toute surfamille d'une famille liée est liée, toute sous-famille d'une famille libre est libre.
  Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée ssi $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
  Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
- Bases. Caractérisation par l'unicité des coordonnées.
- Définition d'un ev de dimension finie (admet une famille génératrice finie). Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète. Définition de la dimension d'un ev de dimension finie comme le nombre d'éléments commun à toutes les bases.
- Dans un ev de dimension finie n, nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice. CNS pour qu'une famille libre/génératrice soit une base.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Un sev F d'un ev E de dim finie est de dim finie, et $\dim F \leq \dim E$; égalité ssi $F = E$.
  Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.
- Formule de Grassman, caractérisations des sev supplémentaires en dim finie (avec $\dim F + \dim G = \dim E$, et : la réunion d'une base de F et d'une base de G forme une base de E).
- Une application linéaire u définie sur un ev de dimension finie E est entièrement déterminé par l'image d'une base. Obtention d'une famille génératrice de $\text{Im}u$ à l'aide d'une famille génératrice de E. Caractérisation de la surjectivité, de l'injectivité, de la bijectivité de u à l'aide de l'image d'une base de E.
- Si E et F sont isomorphes et que E est de dimension finie, alors F aussi et $\dim F = \dim E$. Si E et F sont de dimension finie, ils sont isomorphes ssi ils ont même dimension.
- Rang d'une application linéaire.
- Applications linéaires entre ev de même dim finie : caractérisation de la bijectivité.
- Théorème du rang.

Questions de cours

Demander :

— une définition ou un énoncé du cours ;

— et l'une des démonstrations suivantes :

- Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'un ev E et $x_{n+1} \in E$.
  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée ssi x_{n+1} est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.
- Soit E un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit F un ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  u injective ssi $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre.
- Lemme "Forme géométrique du théorème du rang"(cf poly).

Semaine suivante de colle : Espaces vectoriels de dimension finie, matrices.