Programme de la semaine 23 (du 31/03 au 06/04).

Polynômes

Reprise. La décomposition en éléments simples n'est toujours pas au programme.

Espaces vectoriels de dimension finie, pas encore terminé

- Famille génératrices ; libres, liées. Cas particulier des familles d'un vecteur, de deux vecteurs. Toute surfamille d'une famille liée est liée, toute sous-famille d'une famille libre est libre.
  Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est liée ssi $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
  Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
- Bases. Caractérisation par l'unicité des coordonnées.
- Définition d'un ev de dimension finie (admet une famille génératrice finie). Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète. Définition de la dimension d'un ev de dimension finie comme le nombre d'éléments commun à toutes les bases.
- Dans un ev de dimension finie n, nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice. CNS pour qu'une famille libre/génératrice soit une base.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Un sev F d'un ev E de dim finie est de dim finie, et $\dim F \leq \dim E$; égalité ssi $F = E$.
  Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.
- Formule de Grassman, caractérisations des sev supplémentaires en dim finie (avec $\dim F + \dim G = \dim E$, et : la réunion d'une base de F et d'une base de G forme une base de E).

Rien sur les applications linéaires en dimension finie.

Questions de cours

Demander :

— une définition ou un énoncé du cours ;

— et l'une des démonstrations suivantes :

- Unicité dans la division euclidienne des polynômes.
- Si α est racine d'ordre k d'un polynôme P réel, alors $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre k de P.
- Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un ev E et $x_{n+1} \in E$.
  $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est liée ssi x_{n+1} est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$.

Semaine suivante de colle : Espaces vectoriels de dimension finie.