Programme de la semaine 21 (du 17/03 au 23/03).

Espaces vectoriels et applications linéaires

- Définition d'un espace vectoriel, exemples de référence ($\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$, $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$). Règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
- Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, c'est un ev. Exemples et contre-exemples. Notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sev.
- Somme de deux sev, somme directe (définition : unicité de l'écriture d'un vecteur de $F+G$, caractérisation par la condition $F \cap G = \{0\}$), sev supplémentaires, caractérisation.
- Définition d'une application linéaire, propriétés, vocabulaire.
- Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des sev ; lien avec injectivité et surjectivité.
- Equation linéaire : définition, structure de l'ensemble des solutions, exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre 1 (ou 2).
- Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. La composée de deux applications linéaires est linéaire, règles de calcul avec $\circ$, $+$, ., la réciproque d'un isomorphisme est linéaire, la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme. Puissance d'endomorphisme.
- Projections et symétries : définition et propriétés. Caractérisations : si p est un endomorphisme tel que $p \circ p = p$, c'est une projection ; si s est un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, c'est une symétrie.

Questions de cours

Demander :

— une définition ou un énoncé du cours ;

— et l'une des démonstrations suivantes :

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.
- Une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective si et seulement si son noyau est $\{0\}$.
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ et si $p \circ p = p$, alors $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

Semaine suivante de colle : Espaces vectoriels, applications linéaires, polynômes.