Programme de la semaine 16 (du 27/01 au 02/02).

Applications

- Applications. Composition, cas de la composition avec une application identité. Restrictions, prolongements. Images directes, images réciproques.
- Injectivité, surjectivité, bijectivité. Traduction en termes d'équations. Définition de la réciproque d'une application bijective, théorème faisant le lien avec la composition. Réciproque de $g \circ f$ lorsque f et g sont bijectives. Si f et g sont injectives (respectivement surjectives) alors $g \circ f$ est injective (respectivement surjective).

Limites de fonctions

- Notion de voisinage d'un point. Définitions d'une limite (finie/$+\infty$/$-\infty$) en un point a de l'intervalle I ou une extrémité de I (a fini/$+\infty$/$-\infty$). Limite à gauche, limite à droite, extension de la définition de la limite lorsque f est définie sur I privé de a.
- Unicité de la limite ; si f a une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a ; si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ ((u_n) à valeurs dans I) alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, utilisation pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite. Opérations usuelles sur les limites.
- Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration.
- Théorèmes sur les fonctions monotones (existence d'une limite finie ou infinie selon la situation).
- Définition de la continuité en un point, sur un intervalle. Continuité à gauche et à droite. Prolongement par continuité en un point. Opérations.
- Théorème des valeurs intermédiaires, principe de dichotomie. Théorème de la bijection. Théorème des bornes atteintes (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).

Questions de cours

Demander :

— L'UNE DES 9 DEFINITIONS DE LIMITE : limite finie, $+\infty$ ou $-\infty$ pour une fonction f en un a réel, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

— une définition ou un énoncé du cours ;

— et l'une des démonstrations suivantes :

- Soit $f : E \to F$. S'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, alors f est bijective (démontrer uniquement la bijectivité).
- Si f et g (à introduire) sont injectives alors $g \circ f$ est injective ; si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et si $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$ alors $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$: preuve dans le cas où a, b, ℓ sont finis.

Semaine suivante de colle : limite et continuité d'une fonction, dérivation.