

Interrogation 26.

Mardi 26 mai 2026

/4 1°) Notons, pour tout $k \in \{1, \dots, 4\}$, F_k : "Le k ième élève interrogé est une fille".

On cherche $P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)$.

Par la formule des probabilités composées :

$$P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) = P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(\overline{F_2})P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(F_3)P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3}(F_4)$$

Pour le 1er passage, l'enseignante a 20 élèves à sa disposition dont 17 garçons, donc $P(\overline{F_1}) = \frac{17}{20}$.

Sachant que c'est un garçon qui est passé en premier, il y a 19 élèves potentiels pour le deuxième passage, dont 16 garçons. Donc $P_{\overline{F_1}}(\overline{F_2}) = \frac{16}{19}$.

Sachant que deux garçons sont passés en premier et deuxième, il y a 18 élèves potentiels pour le troisième passage, dont 3 filles. Donc $P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(F_3) = \frac{3}{18}$.

Sachant que deux garçons puis une fille sont passés en premier, deuxième et troisième, il y a 17 élèves potentiels pour le quatrième passage, dont 2 filles. Donc $P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3}(F_4) = \frac{2}{17}$.

Ainsi la probabilité recherchée vaut $\frac{17}{20} \frac{16}{19} \frac{3}{18} \frac{2}{17}$.

/12 2°)

a) X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

Autrement dit, $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

b) $P_{X=k}(F) = p^k$

c) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé par $(X = 1), (X = 2), \dots, (X = n)$:

$$\begin{aligned} P(F) &= \sum_{k=1}^n P(X = k)P_{X=k}(F) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} p^k = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n p^{k-1} = \frac{p}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p^j \text{ avec } j = k - 1 \end{aligned}$$

$$\span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $P(F) = \frac{p}{n} \frac{1 - p^n}{1 - p}$ car $p \neq 1$$$

d) On cherche $P_F(X = 1)$. D'après la formule de Bayes :

$$P_F(X = 1) = \frac{P(X = 1)P_{X=1}(F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{n} p}{\frac{p}{n} \frac{1 - p^n}{1 - p}} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $\frac{1 - p}{1 - p^n}$$$

e) Sachant $X = k$, Y suit une loi binomiale de paramètres k et p , car il s'agit du nombre de "succès" lorsqu'on répète k expériences aléatoires indépendantes (naissance d'un souriceau), où le "succès" pour une naissance est "c'est une femelle", ce qui arrive avec probabilité p .

On a donc, pour $i \in \{0, \dots, n\}$:

$$\boxed{\text{Si } i \in \{0, \dots, k\}, P_{X=k}(Y = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}, \text{ et si } i > k, P_{X=k}(Y = i) = 0.}$$

f) On a $Y(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$.

On applique encore la formule des probabilités totales avec le même SCE :

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = i)$$

$$\boxed{P(Y = i) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \quad \text{car les termes sont nuls si } k < i}$$

g) Par le théorème de transfert : $E(Y^2) = \sum_{i=0}^n i^2 P(Y = i)$