Révisions : calculs de primitives et d'intégrales

Primitivation directe :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$= \Big[x - \ln(|1+x|)\Big]_0^1 = \boxed{1-\ln(2)}$$

$$J = \int_2^e \frac{1/x}{\ln(x)}\,dx = \Big[\ln(|\ln x|)\Big]_2^e = \ln(1) - \ln(\ln 2) = \boxed{-\ln(\ln 2)}$$

Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$: sur I qui vaut $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou bien $]1,+\infty[$.

On fait une décomposition en éléments simples ; comme $2 = (1-x)+(1+x)$, sur I :

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\,\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}$$

donc les primitives sur I sont les

$$F : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(|1+x|) - \frac{1}{2}\ln(|1-x|) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{9x^2+12x+5}$: comme le discriminant du dénominateur est <0, on les cherche sur $\mathbb{R}$.

On écrit $9x^2+12x+5$ sous forme canonique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 9x^2+12x+5 = (3x)^2 + 2\cdot(3x)\cdot 2 + 2^2 + 1$$
$$= (3x+2)^2+1$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{1}{9x^2+12x+5} = \frac{1}{3}\,\frac{3}{(3x+2)^2+1}$$

dérivée de $x \mapsto \text{Arctan}(3x+2)$

donc les primitives sur $\mathbb{R}$ sont les

$$x \longmapsto \frac{1}{3}\text{Arctan}(3x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Intégration par parties :

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\text{Arctan}\, t}{t^3}\,dt$$

justifications : Arctan et $f : t \mapsto -\frac{1}{2t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (et $f' : t \mapsto \frac{1}{t^3}$)

$$= \left[-\frac{1}{2t^2}\text{Arctan}(t)\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{2t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2.3}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2(1+t^2)}\,dt$$
$$= -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2-t^2}{t^2(1+t^2)}\,dt}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \left[-\frac{1}{t} - \text{Arctan}\, t\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} + 1 + \frac{\pi}{4}$$

Après simplifications, $\boxed{I = \dfrac{\pi}{36} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}}$

Changement de variables :

1) $$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,\sin t\,dt$$
$$= -\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}(-\sin t)\,dt$$

on pose $x = \cos t$; la fonction cos est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
on a $dx = (-\sin t)dt$
et si $t=0$, $x=1$, si $t=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{1}{2}$.

D'où $$I = -\int_1^{1/2} \frac{1-x^2}{x^2}dx = \int_{1/2}^1 \frac{1-x^2}{x^2}dx$$
$$= \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx = \left[-\frac{1}{x}-x\right]_{1/2}^1 = \dots = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on calcule par exemple
$$F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}dt$$

On peut poser $u=\sqrt{t}$ mais alors il faut considérer $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}}dt$ et se placer sur $\mathbb{R}_+^*$ pour que $t \mapsto \sqrt{t}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$...
(on écrit $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, et $F(x) = \int_1^x 2\sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$
$= \int_1^{\sqrt{x}} 2ue^u du \dots$)

Une astuce pour éviter cela est de poser plutôt $t = u^2 = \varphi(u)$ avec $\varphi : u \mapsto u^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$;
$dt = 2u\,du$, si $u=0$ alors $t=0$ et si $u=\sqrt{x}$ alors $t=x$
donc $$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^u\, 2u\,du$$
Puis on fait une IPP avec exp et $u \mapsto 2u$ qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $$F(x) = \left[2ue^u\right]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} 2e^u du$$
$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - \left[2e^u\right]_0^{\sqrt{x}}$$
$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$$

donc les primitives de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$ sont les
$$\boxed{x \longmapsto 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C,\quad C \in \mathbb{R}.}$$