Révisions : calculs de primitives et d'intégrales.

• **Primitivation directe** :

Exercice 1 : Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x, \qquad F(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad G(x) = \int \frac{1}{9x^2+12x+5}\,\mathrm{d}x.$$

• **Intégration par parties** :

Théorème :

Soit I un intervalle, et a, b des éléments de I. Soient f, g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exercice 2 : Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

• **Changement de variable** :

Théorème :

Soient I et J des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$, et α, β des éléments de J.

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

En pratique, on utilise les notations formelles suivantes :

— On pose : $x = \phi(t)$ avec $\phi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

— On a alors : $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$

— $\begin{cases} \text{Si } t = a \text{ alors } x = \phi(a) \\ \text{Si } t = b \text{ alors } x = \phi(b) \end{cases}$

Exercice 3 :

1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

2) Déterminer les primitives de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$.