AP : Entraînement au calcul de dérivées - corrigé.

1°) $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D,\ f(x) = 15x^3 - 10x^2$.

$D' = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = 45x^2 - 20x = 5x(9x-4)$.

2°) $D = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in D,\ f(x) = 4\left(x^{-5} + \dfrac{1}{x}\right)$.

$D' = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = 4\left(-5x^{-6} - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{4(5+x^4)}{x^6}$.

3°) $D = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in D,\ f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{6x^2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{6x^2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x^{-2}$.

$D' = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{2}{6}x^{-3} = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} = \dfrac{3x-2}{6x^3}$.

4°) $D = \mathbb{R}_+$.

On peut écrire, pour $x > 0$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

$D' = \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

5°) $D = \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in D,\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}$.

$D' = \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2x}}$.

6°) $D = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$D' = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = 2(x-2)\sqrt{2x+1} + (x-2)^2 \times \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x+1) + (x-2)^2}{\sqrt{2x+1}} = \frac{(x-2)(4x+2+x-2)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{5x(x-2)}{\sqrt{2x+1}}.$$

7°) $D = \mathbb{R}_+$.

On peut écrire, pour $x > 0$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x}$.

$D' = \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in D',\ f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

8°) $D = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in D,\ f(x) = e^{x \ln 2}$.

$D' = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \ln 2 \times e^{x \ln 2} = \ln 2 \times 2^x$.

9°) $D =]-1, 1[$.

$\forall x \in D,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$ car $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$.

$D' =]-1, 1[$.

$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

10°) $D = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in D,\ f(x) = e^{5x^4-4x^2-3}$.

$D' = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in D',\ f'(x) = (20x^3 - 8x)e^{5x^4-4x^2-3} = 4x(5x^2-2)e^{5x^4-4x^2-3}$.

11°) $D = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in D,\ f(x) = \ln 2 + \ln(x^4) = \ln 2 + 4\ln(|x|)$.

$D' = \mathbb{R}^*$.

Si on sait déjà que la dérivée sur $\mathbb{R}^*$ de $x \mapsto \ln(|x|)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on peut trouver très vite le résultat simplifié ; sinon, on écrit :

$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \dfrac{4x^3}{x^4} = \dfrac{4}{x}$.

12°) $D = \mathbb{R}$.

$D' = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in D',\ f'(x) = 3x^2 \sin(x \ln 4 + 1) + x^3 \ln 4 \cos(x \ln 4 + 1)$.

13°) $\forall\, x \in D',\ f'(x) = 5x^4(1 + \tan^2(x^5))$. C'est aussi $\dfrac{5x^4}{\cos^2(x^5)}$.

14°) $\forall\, x \in D',\ f'(x) = \dfrac{-\sin x(\sin x - x\cos x) - (\cos x - 1 \times \cos x + x \sin x)\cos x}{(\sin x - x\cos x)^2} = -\dfrac{\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2}$.

15°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ donc $D = \mathbb{R}$.

$D' = \mathbb{R}$.

$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.

16°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc $D = \mathbb{R}$.

$D' = \mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{4\sqrt{1+x^2} - 4x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{4\dfrac{(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{4x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\dfrac{4}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{4}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

On peut aussi écrire $f(x) = 4x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ pour n'avoir qu'un produit à dériver (mais ensuite, il faut mettre au même dénominateur).

17°) $D = [0, 4]$.

$D' =]0, 4[$.

$$\forall\, x \in D',\ f'(x) = 1 \times \sqrt{2-\sqrt{x}} + x \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}} = \frac{4(2-\sqrt{x})-\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}} = \frac{8-5\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}}.$$

18°) $D =]-\infty, -2[\, \cup\,]0, +\infty[$

(attention, dans le cas $x < 0$, à changer le sens de l'inégalité lorsque vous passez $\dfrac{2}{x}$ à l'inverse...)

$D' = D$.

$$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \frac{-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}} \cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = \frac{-2}{x(x+2)} \cos\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right).$$

19°) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

(la quantité $1+\sin x$ est toujours positive et ses valeurs d'annulations sont les $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$)

$\forall\, x \in D,\ f(x) = \exp(\cos x \ln(1+\sin x))$.

$D' = D$.

$$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \left(-\sin x \ln(1+\sin x) + \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\right) \exp(\cos x \ln(1+\sin x)).$$

20°) $$\forall\, x \in D',\ f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \frac{1}{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x^2}\tan\left(\frac{1}{x}\right).$$