Entraînement au calcul de dérivées et à la justification de la dérivabilité.

Exercice 1

Consigne pour chacune des fonctions :

- Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité (pas de justifications demandées)
- Calculer la dérivée

1°) $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$

2°) $f : x \mapsto \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\sin(2x)$

3°) $f : x \mapsto \exp\left(\operatorname{sh}(x)\right)$

4°) $f : x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$

5°) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 \sin(5x-1)}{\ln x}$

6°) $f : x \mapsto \cos\left(\sin x\right) - \sin\left(\cos x\right)$

7°) $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

8°) $f : x \mapsto \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x}$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$

10°) $f : x \mapsto x^{(x^x)}$

Exercice 2

Consigne pour chacune des fonctions :

- Justifier soigneusement les dérivabilités en suivant les éventuelles consignes spécifiques
- Calculer la dérivée

Remarque : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et que la question est "montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$", on ne vous demande pas de montrer que f est non dérivable en 0.
En effet, la phrase "f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$" ne dit rien sur la dérivabilité en 0.

1°) $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$:

Justifier que f est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[$.

2°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 10}$:

Justifier que f est définie sur $]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$, dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$, non dérivable en -2 et en 5, et calculer $f'(x)$ pour x dans $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.

3°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$:

Justifier que f est définie et dérivable sur $]-\infty, 2[$, calculer sa dérivée.

4°) $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(e^{-x^2}\right)$:

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}^*$.

5°) $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$:

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}^*$.

6°) $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$:

Justifier que f est définie sur $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$, dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, non dérivable en 1, et calculer $f'(x)$ pour x dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

7°) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$:

Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}_+$.

8°) $f : x \mapsto 10^{\sqrt{x}}$:

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}_+^*$.

9°) $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt{(x-1)^3}$:

Justifier que f est définie $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $]1, +\infty[$.

10°) $f : x \mapsto x\sqrt{2 - \sqrt{x}}$:

Justifier que f est définie sur $[0, 4]$, dérivable sur $[0, 4[$, non dérivable en 4, et calculer $f'(x)$ pour x dans $[0, 4[$.