Corrigé de l'interrogation sur les équations différentielles.

Exercice 1

1°) a) *Méthode 1* :

Soit a, b, c des réels. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \iff \frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{a(1+x^2)+(bx+c)x}{x(1+x^2)}$$
$$\iff 2 = x^2(a+b) + cx + a$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, *il suffit* que le système suivant soit vérifié :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$$

Ainsi, les réels $\boxed{a=2, b=-2, c=0 \text{ conviennent}}$.

Méthode 2 :

Pour tout $x > 0$, $\displaystyle\frac{2}{x(1+x^2)} = 2 \times \frac{1}{x(1+x^2)} = 2\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$.

Ainsi, les réels $\boxed{a=2, b=-2, c=0 \text{ conviennent}}$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + x^3 = x(1+x^2) \neq 0$.

Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, $(E_1) \iff y'(x) + \dfrac{2}{x+x^3}y(x) = \dfrac{3x+x^3}{x+x^3}$.

(E_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (avec second membre).

★ Notons (H_1) : $y'(x) + \dfrac{2}{x(1+x^2)}y(x) = 0$ l'équation homogène associée à (E_1).

D'après la question 1, pour tout $x > 0$, $\dfrac{2}{x(1+x^2)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{1+x^2}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto 2\ln(|x|) - \ln(|x^2+1|)$, i.e. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$.

Donc l'ensemble des solutions de (H_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\left\{x \mapsto \lambda \exp\left(-\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\right) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$,

i.e. $\left\{x \mapsto \lambda \dfrac{x^2+1}{x^2} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

★ On remarque que $x \mapsto x$ est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x+x^3) \times 1 + 2 \times x = 3x + x^3$.

★ Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \left\{x \mapsto x + \lambda\dfrac{x^2+1}{x^2} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.

2°) Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff y' \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ y'(x) = x + \lambda\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ y(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda\left(x - \frac{1}{x}\right) + \mu \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \left\{x \mapsto \frac{x^2}{2} + \lambda\left(x - \frac{1}{x}\right) + \mu \ /\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Exercice 2

1°) a) z est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions deux fois dérivable.
Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{z'(t) = (1 + \tan^2 t)y'(\tan t)}$$

$$\text{et } z''(t) = (1 + \tan^2 t)\tan'(t)y''(\tan t) + 2\tan'(t)\tan(t)y'(\tan t)$$

$$\boxed{z''(t) = (1 + \tan^2 t)^2 y''(\tan t) + 2(1 + \tan^2 t)(\tan t)\, y'(\tan t)}$$

b) *On peut aussi partir du membre de droite, mais les calculs et les arguments sont les mêmes.*

y solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1 + x^2)^2 y''(x) + (2x - 2)(1 + x^2)y'(x) + 5y(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (1 + x^2)^2 y''(x) + 2(1 + x^2)xy'(x) - 2(1 + x^2)y'(x) + 5y(x) = 0$

$\iff \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$(1 + \tan^2 t)^2 y''(\tan t) + 2(1 + \tan^2 t)(\tan t)\, y'(\tan t) - 2(1 + \tan^2 t)y'(\tan t) + 5y(\tan t) = 0$

car tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$

$\iff \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, z''(t) - 2z'(t) + 5z(t) = 0$

$\iff \boxed{z \text{ solution de } (F) \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$

2°) (F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0$.
Son discriminant vaut $\Delta = -16 = (4i)^2$, donc ses racines sont $\dfrac{2 + 4i}{2} = 1+2i$ et $\dfrac{2 - 4i}{2} = 1-2i$.
Donc l'ensemble des solutions réelles de (H) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est

$$\boxed{\left\{t \mapsto e^t\left(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)\right)\ /\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

3°) D'après tout ce qui précède, pour $y :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable :

y solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$\iff \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z(t) = e^t\left(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)\right)$

$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ y(\tan t) = e^{\operatorname{Arctan}(\tan t)}\left(\lambda\cos(2\operatorname{Arctan}(\tan t)) + \mu\sin(2\operatorname{Arctan}(\tan t))\right)$

$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\operatorname{Arctan} x}\left(\lambda\cos(2\operatorname{Arctan} x) + \mu\sin(2\operatorname{Arctan} x)\right)$

car Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

L'ensemble des solutions réelles de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\left\{x \mapsto e^{\operatorname{Arctan} x}\left(\lambda\cos(2\operatorname{Arctan} x) + \mu\sin(2\operatorname{Arctan} x)\right)\ /\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$