# Interrogation sur les équations différentielles.

*Jeudi 14 décembre 2023, de 7h45 à 8h45.*

**L'usage de calculatrices est interdit**

## Exercice 1

**1°) a)** Déterminer des réels $a, b, c$ tels que : $\forall x > 0,\ \dfrac{2}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

**b)** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E_1)$ suivante :

$$(E_1)\ :\ (x+x^3)y'(x) + 2y(x) = 3x + x^3.$$

*Indication* : On pourra remarquer qu'il y a une solution évidente de $(E_1)$.

**2°)** En déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(E_2)$ suivante :

$$(E_1)\ :\ (x+x^3)y''(x) + 2y'(x) = 3x + x^3$$

## Exercice 2

On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ (1+x^2)^2y''(x) + (2x-2)(1+x^2)y'(x) + 5y(x) = 0.$$

**1°)** Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit la fonction $z$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall\, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\quad z(t) = y\left(\tan t\right).$$

**a)** Justifier que $z$ est deux fois dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer $z'$ et $z''$.

**b)** Montrer l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \iff z \text{ solution de } (F) \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

où $(F)$ est l'équation différentielle suivante : $z''(t) - 2z'(t) + 5z(t) = 0$.

**2°)** Déterminer les solutions réelles de $(F)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

**3°)** En déduire les solutions réelles de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.