Correction du devoir surveillé 8.

Exercice

1°) Pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

2°) X_1 suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Donc $X_1(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $P(X_1 = i) = \dfrac{1}{n}$.

★ $E(X_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} iP(X_1 = i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi, $\boxed{E(X_1) = \dfrac{n+1}{2}}$.

★ $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$.

$E(X_1^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 P(X_1 = i)$ par la formule du transfert.

Donc, $E(X_1^2) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$V(X_1) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1))}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

Ainsi, $\boxed{V(X_1) = \dfrac{(n+1)(n-1)}{12}}$.

3°) $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\frac{1}{n^{k+1}}S_k(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$. f est continue sur le segment $[0,1]$.

La suite $\left(\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}}\right)_{n\geq 2}$ est une somme de Riemann associée à f.

Donc, $\displaystyle\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x$. Or $\displaystyle\int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}}\right)_{n\geq 2} \text{ converge vers } \dfrac{1}{k+1}}$.

4°) a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

On a $(X = i) = (X \geq i) \setminus (X \geq i+1)$ et $(X \geq i+1) \subset (X \geq i)$,

donc $\boxed{P(X = i) = P(X \geq i) - P(X \geq i+1)}$.

b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} iP(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i(P(X \geq i) - P(X \geq i+1)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(X \geq i) - \sum_{i=1}^{n} iP(X \geq i+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} jP(X \geq j) - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)P(X \geq j) \text{ en posant } j = i+1 \text{ dans la 2e somme} \\
&= P(X \geq 1) + \sum_{j=2}^{n} (j-(j-1))P(X \geq j) - nP(X \geq n+1) \\
&= P(X \geq 1) + \sum_{j=2}^{n} P(X \geq j) \text{ car } X \leq n \text{ donc } P(X \geq n+1) = 0 \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(X \geq j)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X \geq i)}$.

5°) a) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.
$P(U_k \geq i) = P(\min(X_1, \ldots, X_k) \geq i) = P((X_1 \geq i) \cap \cdots \cap (X_k \geq i))$.
Or les variables $X_1, \ldots, X_k$ sont indépendantes donc
$P((X_1 \geq i) \cap \cdots \cap (X_k \geq i)) = P(X_1 \geq i) \times \cdots \times P(X_k \geq i)$.
Les variables $X_1, \ldots, X_k$ suivent la même loi donc finalement $P(U_k \geq i) = P(X_1 \geq i)^k$.
$P(X_1 \geq i) = P\left(\bigcup_{j=i}^{n} (X_1 = j)\right) = \sum_{j=i}^{n} P(X_1 = j)$ car la réunion est disjointe 2 à 2.
Donc, $P(X_1 \geq i) = \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-i+1}{n}$.
Finalement, $\boxed{P(U_k \geq i) = \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k}$.

b) Par la question 4b, puisque U_k est à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
E(U_k) &= \sum_{i=1}^{n} P(U_k \geq i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k \\
&= \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)^k \\
&= \frac{1}{n^k} \sum_{j=1}^{n} j^k \text{ en posant } j = n-i+1
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(U_k) = \frac{S_k(n)}{n^k}}$$

c) On sait, par 3, que $\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k+1}$.

Donc, comme $\dfrac{1}{k+1} \neq 0$, $\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k+1}$. Donc $\dfrac{S_k(n)}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{k+1}$.

Ainsi, $\boxed{E(U_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{k+1}}$.

6°) a) U_k est à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ donc, en utilisant l'expression de $E(U_k^2)$ donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
E(U_k^2) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{j=1}^{n}(2(n-j+1)-1)\left(\frac{j}{n}\right)^k \quad \text{en posant } j=n-i+1 \text{ (donc } i=n-j+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(2n+1-2j)\frac{j^k}{n^k} \\
&= \frac{2n+1}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^k \; - \; \frac{2}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(U_k^2) = \frac{2n+1}{n^k}S_k(n) - \frac{2}{n^k}S_{k+1}(n)}$$

b) La question revient à montrer que $\dfrac{V(U_k)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{k}{(k+2)(k+1)^2}$.

$$\begin{aligned}
V(U_k) &= E(U_k^2) - E(U_k)^2 \\
&= \frac{2n+1}{n^k}S_k(n) - \frac{2}{n^k}S_{k+1}(n) - \frac{S_k(n)^2}{n^{2k}} \\
\frac{V(U_k)}{n^2} &= \frac{2n+1}{n}\frac{S_k(n)}{n^{k+1}} - 2\frac{S_{k+1}(n)}{n^{k+2}} - \left(\frac{S_k(n)}{n^{k+1}}\right)^2
\end{aligned}$$

Par 3, $\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k+1}$ et $\dfrac{S_{k+1}(n)}{n^{k+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k+2}$.

Donc, par opérations sur les limites, $\dfrac{V(U_k)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{2}{k+2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{2(k+1)(k+2) - 2(k+1)^2 - (k+2)}{(k+1)^2(k+2)} \\
&= \frac{2(k^2+3k+2) - 2(k^2+2k+1) - k - 2}{(k+1)^2(k+2)} \\
&= \frac{k(6-4-1) + 4 - 2 - 2}{(k+1)^2(k+2)} \\
&= \frac{k}{(k+1)^2(k+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{V(U_k)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{k}{(k+1)^2(k+2)}$.

Ce qui s'écrit : $\boxed{V(U_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{(k+1)^2(k+2)}n^2}$.

Problème

Partie 1

1°) $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Comme c'est une limite finie, f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.

De plus, par quotient, f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$

2°) Par quotient de fonctions dérivables, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right]}$.

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \dfrac{1 \times \sin(x) - x\cos(x)}{(\sin(x))^2}$.

D'une part, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $(\sin(x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sin(x) - x\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\sin(x) - x\cos(x) &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

On en tire que $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^3}{3}}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}}$.

3°) On vient de voir que :

- f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- et comme $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

L'information $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ se réécrit donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0.

Comme, par ailleurs, f' était continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par quotient, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]}$.

4°) Soit k un entier tel que $k \geq 2$.

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_k(x) = x^{k-1} f(x)$.

De plus $0^{k-1} = 0$ car $k - 1 \geq 1$ donc $f_k(x) = x^{k-1} f(x)$ est valable pour $x = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_k(x) = x^{k-1} f(x)$.

Comme f et $x \mapsto x^{k-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par produit, $\boxed{f_k \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$.

5°) Comme $P(0)$ est le coefficient constant du polynôme P, on sait grâce à l'hypothèse $P(0) = 0$ qu'il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1, \ldots, a_d$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k X^k$.

Pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\varphi(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^k}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{x^k}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^k \left(\dfrac{\pi x}{2}\right)^k}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$$

Donc, $\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{2^k}{\pi^k} f_k\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

6°) On pose alors $\varphi(0) = a_1 \dfrac{2}{\pi}$; comme $f_1(0) = f(0) = 1$ et $f_k(0) = 0$ pour $k \geq 2$, la relation $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k \frac{2^k}{\pi^k} f_k\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est encore valable en 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\pi x}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et les $f_1, \ldots, f_d$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, par composition et combinaison linéaire, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$.

7°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et la fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)$ aussi. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(\lambda t) g(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t) g(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t) g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda) g(1) + \frac{1}{\lambda} g(0) + \int_0^1 \frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t) g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(-\cos(\lambda) g(1) + g(0) + \int_0^1 \cos(\lambda t) g'(t)\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire, et comme $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \sin(\lambda t) g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\left(|-\cos(\lambda) g(1)| + |g(0)| + \left|\int_0^1 \cos(\lambda t) g'(t)\,\mathrm{d}t\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left(|g(1)| + |g(0)| + \left|\int_0^1 \cos(\lambda t) g'(t)\,\mathrm{d}t\right|\right) \quad \text{car } |\cos| \leq 1 \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left(|g(1)| + |g(0)| + \int_0^1 |\cos(\lambda t) g'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{par inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1], |\cos(\lambda t) g'(t)| \leq |g'(t)|$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 |\cos(\lambda t) g'(t)| \leq \int_0^1 |g'(t)|\,\mathrm{d}t$ par croissance de l'intégrale.

Ainsi, $\displaystyle\left|\int_0^1 \sin(\lambda t) g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(|g(1)| + |g(0)| + \int_0^1 |g'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$.

Donc, en posant $\boxed{A = |g(1)| + |g(0)| + \displaystyle\int_0^1 |g'(t)|\,\mathrm{d}t}$, on a bien, pour tout $\lambda > 0$:

$$\boxed{\left|\int_0^1 \sin(\lambda t) g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{A}{\lambda}}$$

8°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi > 0$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après la question précédente, il existe un réel A tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{A}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

Comme $\dfrac{A}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par théorème de comparaison, on obtient bien que

$$\boxed{\int_0^1 \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Partie 2

9°) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction u sur l'intervalle $\mathbb{R}$; plus précisément, c'est $\boxed{\text{l'unique primitive de } u \text{ sur } \mathbb{R} \text{ qui s'annule en } 0}$.

10°) Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(\lambda P_1 + P_2)(x) &= \int_0^x (t-x)(\lambda P_1 + P_2)(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{x^2}{2}\int_0^1 (\lambda P_1 + P_2)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x (\lambda(t-x)P_1(t) + (t-x)P_2(t))\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{x^2}{2}\int_0^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\int_0^x (t-x)P_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (t-x)P_2(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \lambda\frac{x^2}{2}\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda\left(\int_0^x (t-x)P_1(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_0^x (t-x)P_2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda h(P_1)(x) + h(P_2)(x)
\end{aligned}$$

Ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $h(\lambda P_1 + P_2) = \lambda h(P_1) + h(P_2)$. Ainsi, $\boxed{h \text{ est linéaire}}$.

11°) **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant $a = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$,

$$Q(x) = \int_0^x (tP(t) - xP(t))\,\mathrm{d}t \;+ a\frac{x^2}{2} = \int_0^x tP(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \;+ a\frac{x^2}{2}$$

D'où, en utilisant la question 9 avec $t \mapsto tP(t)$ et $t \mapsto P(t)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q'(x) = xP(x) - \left(xP(x) + \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right) + ax = \boxed{-\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{Q''(x) = -P(x) + \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}$$

12°)
- Soit $P \in \mathrm{Ker}(h)$. Alors $Q = h(P) = 0$, donc $Q'' = 0$.

  À l'aide de la question précédente : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-P(x) + \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ d'où $P(x) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$: on obtient bien que P est une constante.
- Réciproquement, si $P = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(P)(x) &= \int_0^x (t-x)\alpha\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{x^2}{2}\int_0^1 \alpha\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{(t-x)^2}{2}\alpha\right]_0^x \;+\; \frac{x^2}{2}\,[\alpha t]_0^1 \\
&= 0 - \frac{(-x)^2}{2}\alpha + \frac{x^2}{2}\alpha = 0
\end{aligned}$$

  Donc $P \in \mathrm{Ker}(h)$.

- Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(h) \text{ est bien l'espace des polynômes constants } \mathbb{R}_0[X]}$.

13°) a) Soit $Q \in \mathrm{Im}(h)$. Il existe un polynôme P tel que $Q = h(P)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \displaystyle\int_0^x (t-x)P(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$, donc $Q(0) = 0+0 = 0$.

On a vu, à la question 11a que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) = -\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$, donc de même $Q'(0) = 0$, et $Q'(1) = -\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + 1\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi, $Q \in G$. On a bien montré que $\boxed{\mathrm{Im}(h) \subset G}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(Q'')(x) &= \int_0^x (t-x)Q''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 Q''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [(t-x)Q'(t)]_0^x - \int_0^x Q'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}[Q'(t)]_0^1 \\
&\qquad \text{par intégration par parties, car } t \mapsto t-x \text{ et } Q' \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \\
&= 0 - (-x)Q'(0) - [Q(t)]_0^x + \frac{x^2}{2}(Q'(1) - Q'(0)) \\
&= -(Q(x) - Q(0)) \quad \text{car } Q'(0) = Q'(1) = 0 \text{ par hypothèse} \\
&= -Q(x) \quad \text{car } Q(0) = 0 \text{ par hypothèse}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{h(Q'') = -Q}$. Comme h est linéaire, on peut écrire $Q = h(-Q'')$, donc $Q \in \mathrm{Im}(h)$.

Ainsi, on a montré $G \subset \mathrm{Im}(h)$, et par double inclusion, on conclut que $\boxed{\mathrm{Im}(h) = G}$.

Partie 3

14°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
P_2(x) = h(P_1)(x) &= \int_0^x (t-x)\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^3}{2} + t^2\left(-1 - \frac{x}{2}\right) + tx\right)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{t^4}{8} - \frac{t^3}{3}\left(1 + \frac{x}{2}\right) + x\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{-x^4}{24} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6}}$$

15°) Soit $n \geq 2$; on a donc $P_n = h(P_{n-1})$, donc $P_n \in \mathrm{Im}(h) = G$, donc $\boxed{P_n(0) = P_n'(0) = P_n'(1) = 0}$.

16°) Soit $n \geq 2$. Comme $P_n = h(P_{n-1})$, en utilisant la question 11b, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{P_n''(x) = -P_{n-1}(x) + \alpha} \qquad \text{en notant } \alpha = \int_0^1 P_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

17°) Comme P_n et $t \mapsto \dfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, par intégration par parties,

$$\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}P_n(t)\right]_0^1 - \int_0^1 P_n'(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k\pi}\int_0^1 P_n'(t)\sin(k\pi t)\,\mathrm{d}t$$

Comme P_n' et $t \mapsto \dfrac{-\cos(k\pi t)}{k\pi}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{k\pi}\left(\left[-\frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}P_n'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 P_n''(t)\frac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_n''(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } P_n'(1) = P_n'(0) = 0\\
&= -\frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 (-P_{n-1}(t)+\alpha)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après la question précédente}\\
&= \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t - \alpha\frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t}$$

car $\displaystyle\int_0^1 \cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^1 = 0.$

Partie 4

18°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0,1]$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} e^{ik\pi t}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} e^{ik\pi t} &= \sum_{k=1}^{N}(e^{i\pi t})^k\\
&= e^{i\pi t}\sum_{k=1}^{N}(e^{i\pi t})^{k-1}\\
&= e^{i\pi t}\sum_{\ell=0}^{N-1}(e^{i\pi t})^{\ell} \qquad \text{en posant } \ell = k-1\\
&= e^{i\pi t}\frac{1-(e^{i\pi t})^N}{1-e^{it}} \qquad \text{car } e^{i\pi t} \neq 1\\
&= e^{i\pi t}\frac{1-e^{iN\pi t}}{1-e^{i\pi t}}\\
&= e^{i\pi t}\frac{e^{i\frac{N\pi t}{2}}\left(e^{-i\frac{N\pi t}{2}} - e^{i\frac{N\pi t}{2}}\right)}{e^{i\frac{\pi t}{2}}\left(e^{-i\frac{\pi t}{2}} - e^{i\frac{\pi t}{2}}\right)}\\
&= e^{i\left(\frac{N\pi t}{2}+\frac{\pi t}{2}\right)}\frac{-2i\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\\
&= e^{i\frac{(N+1)\pi t}{2}}\frac{\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right) + i\sin\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t) = \frac{\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right) &= \sin\left(\frac{(2N+1)\pi t}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}+\frac{N\pi t}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{N\pi t}{2}\right)+\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) &= \sin\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}-\frac{N\pi t}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{N\pi t}{2}\right)-\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)\end{aligned}$$

D'où $2\sin\left(\frac{N\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{2}\right)=\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t)=\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}-\frac{1}{2}}.$$

19°) Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

On a admis que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(k\pi)^{2n}}$.

En sommant de $k=1$ à $k=N$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k\pi)^{2n}}$.

Donc, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle S_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}}=\pi^{2n}\int_0^1\sum_{k=1}^{N}P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

Par la question précédente : $\forall t\in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P_n(t)\cos(k\pi t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}P_n(t)-P_n(t)\right)$.

On pose, pour tout $t\in]0,1]$, $\varphi_n(t)=\dfrac{P_n(t)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}$.

Par la question 6, puisque P_n est un polynôme à coefficients réels vérifiant $P_n(0)=0$, la fonction φ_n se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$.

Pour tout $t\in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)P_n(t)=\frac{1}{2}\left(\varphi_n(t)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)-P_n(t)\right)$

Par continuité en 0 de toutes les fonctions impliquées dans l'égalité précédente, on en déduit que l'égalité est encore valable en $t=0$.

Ainsi, $\boxed{S_N=\frac{\pi^{2n}}{2}\left(\int_0^1\varphi_n(t)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t\right)}$.

20°) Par 8, comme φ_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1\varphi_n(t)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\,\mathrm{d}t\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

On en déduit par opérations sur les limites que $\boxed{(S_N)\text{ converge vers }-\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t.}$

21°) • Pour $n = 1$: $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$. Par la question précédente, (S_N) converge vers $-\dfrac{\pi^2}{2}\displaystyle\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t$.

Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P_1(t) = \dfrac{t^2}{2} - t$.

$\displaystyle\int_0^1 P_1(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\right) \text{ converge vers } \dfrac{\pi^2}{6}}$.

• Pour $n = 2$: $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^4}$.

Par la question précédente, (S_N) converge vers $-\dfrac{\pi^4}{2}\displaystyle\int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t$.

Par la question 14, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P_2(t) = -\dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{6}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_2(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{18}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{120} + \frac{1}{24} - \frac{1}{18} \\
&= \frac{-1+5}{120} - \frac{1}{18} = \frac{1}{30} - \frac{1}{18} = \frac{3-5}{90} \\
&= -\frac{1}{45}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^4}\right) \text{ converge vers } \dfrac{\pi^4}{90}}$.