Devoir surveillé 8.

Vendredi 16 juin 2023, de 13h30 à 17h30.

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on considère la suite $(S_k(n))_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall\, n \geq 2, \quad S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On note aussi $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes, suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
On pose $U_k = \min(X_1, \dots, X_k)$.

Dans la suite k désigne un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1°) Rappeler les valeurs de $S_1(n)$ et de $S_2(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

2°) Calculer $E(X_1)$. Montrer que $V(X_1) = \dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$.

3°) À l'aide des sommes de Riemann, justifier que la suite $\left(\dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}}\right)_{n\geq 2}$ converge vers $\dfrac{1}{k+1}$.

4°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $P(X = i)$ en fonction de $P(X \geq i)$ et $P(X \geq i+1)$.

b) En déduire, en utilisant un changement d'indices, que : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X \geq i)$.

5°) **a)** Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Justifier que $P(U_k \geq i) = \left(\dfrac{n-i+1}{n}\right)^k$.

b) Déduire des questions précédentes que $E(U_k) = \dfrac{S_k(n)}{n^k}$.

c) Donner un équivalent de $E(U_k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.
On admet qu'on peut démontrer, de manière similaire à la question 4 l'égalité :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) P(X \geq i).$$

a) En déduire que $E(U_k^2) = \dfrac{2n+1}{n^k} S_k(n) - \dfrac{2}{n^k} S_{k+1}(n)$.

b) En déduire que $V(U_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{(k+1)^2(k+2)} n^2$.

Problème

L'objectif de ce problème est, pour certains entiers p supérieurs ou égaux à 2, de justifier la convergence de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^p}$$

et d'obtenir une expression de la limite de $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$.

Partie 1

Soit f l'application de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right],\quad f(x) = \frac{x}{\sin(x)}.$$

1°) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que l'on notera encore f dans la suite. Que vaut $f(0)$?

2°) Justifier que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer un équivalent de $f'(x)$ en 0.

3°) Montrer alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4°) On note $f_1 = f$.

Pour tout entier $k \geq 2$, on note f_k la fonction définie par : $f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^k}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

À l'aide de la question 3, justifier que, pour tout $k \geq 2$, f_k est classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Dans la suite de cette partie, on note P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$, et φ l'application définie sur $]0, 1]$ par

$$\forall\, x \in]0, 1],\ \varphi(x) = \frac{P(x)}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}.$$

5°) Exprimer, pour tout $x \in]0, 1]$, $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions f_k et des coefficients de P.

6°) En déduire que φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

7°) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'il existe un réel A tel que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\quad \left|\int_0^1 \sin(\lambda t) g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{A}{\lambda}.$$

8°) Montrer que :

$$\int_0^1 \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Partie 2

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On identifiera les polynômes et les fonctions polynômiales.

9°) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que représente $x \mapsto \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$ vis-à-vis de u ?

10°) On note h l'application définie sur E qui, à tout $P \in E$, associe la fonction $Q = h(P)$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t)\,\mathrm{d}t \ + \ \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que h est linéaire.

On admet que h est à valeurs dans E. Ainsi $h \in \mathcal{L}(E)$.

11°) Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.

a) Montrer : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) = x\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \ - \ \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer Q''.

12°) En déduire que $\mathrm{Ker}(h)$ est exactement l'espace vectoriel des polynômes constants.

13°) Notons G l'ensemble des polynômes Q de E tels que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$.

a) Justifier que $\mathrm{Im}(h) \subset G$.

b) Soit $Q \in G$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $h(Q'') = -Q$.
En déduire l'égalité $\mathrm{Im}(h) = G$.

Partie 3

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \\ \forall\, n \geq 2,\ \ P_n = h(P_{n-1}). \end{cases}$$

14°) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = -\dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{6}$.

15°) Sans calcul, donner les valeurs de $P_n(0)$, de $P_n'(0)$ et de $P_n'(1)$ pour tout $n \geq 2$.

16°) Soit $n \geq 2$. À l'aide de la partie 2, montrer qu'il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n''(x) = -P_{n-1}(x) + \alpha.$$

17°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$. Montrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que

$$\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{(k\pi)^2}$.
On peut calculer la valeur de u_1 et en déduire l'expression de u_n ; on admettra, dans la suite du problème, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Partie 4

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On s'intéresse à la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}}.$$

18°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. À l'aide des nombres complexes, montrer que pour tout $t \in]0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{N} \cos(k\pi t) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

19°) En déduire qu'il existe une fonction φ_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N = \frac{\pi^{2n}}{2}\left(\int_0^1 \varphi_n(t)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\mathrm{d}t - \int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

20°) Montrer que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-\dfrac{\pi^{2n}}{2}\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t$.

21°) Application : déterminer la limite des suites de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^4}$.

`Remarque culturelle :`

On peut montrer que, pour tout réel $s > 1$, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s}$ converge, et sa limite est notée $\zeta(s)$. On s'autorise à écrire :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}.$$

La fonction ζ est appelée fonction de Riemann.
On a justifié l'existence de $\zeta(p)$ pour tout entier naturel pair p non nul, et on a calculé $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

On peut montrer que l'on peut prolonger la fonction ζ à $\mathbb{C}$ tout entier. ζ s'annule en tous les entiers du type $-2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Ils sont appelés zéros triviaux. Tous les autres zéros trouvés jusqu'à présent se trouvent sur la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. L'hypothèse de Riemann stipule que tous les zéros non triviaux de la fonction ζ sont sur cette droite. Cette répartition des zéros non triviaux est la clé de la répartition des nombres premiers. C'est le plus célèbre des problèmes non résolus de maths. Le grand mathématicien Hilbert aurait dit un jour que, s'il était réveillé après un sommeil de 1000 ans, la première chose qu'il demanderait serait : « L'hypothèse de Riemann a-t-elle été démontrée ? »

$* * * * *$ FIN $* * * * *$