Correction du devoir surveillé 7.

Exercice 1

1°) a)

$$\begin{aligned}
D(x) &= \det(M - xI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 4-x & -3 & 2 \\ 1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 2 \\ 1-x & -x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} && \text{par linéarité par rapport à } C_1 \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 2-x & 1-x \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (1-x)(2-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} && \text{par linéarité par rapport à } C_2 \\
&= (1-x)(2-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= (1-x)(2-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} && \text{par développement par rapport à } C_1 \\
&= (1-x)(2-x)\left(1.(1-x) - 1.(-1)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D(x) = (1-x)(2-x)^2}$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) = \{0\} &\iff f - \lambda\mathrm{id} \text{ injective} \\
&\iff f - \lambda\mathrm{id} \text{ bijective} \quad \text{car } f - \lambda\mathrm{id} \in \mathcal{L}(E) \text{ et } E \text{ est de dimension finie} \\
&\iff M - \lambda I_3 \text{ inversible} \\
&\iff D(\lambda) \neq 0
\end{aligned}$$

On en tire que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\} \iff D(\lambda) = 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\} \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2}$$

2°) a) • Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}) &\iff (M-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}3&-3&2\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}3x-3y+2z&=&0\\x-y+z&=&0\\-x+y&=&0\end{array}\right.\\
L_1\leftrightarrow L_3 &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+y&=&0\\x-y+z&=&0\\3x-3y+2z&=&0\end{array}\right.\\
\begin{array}{r}L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3+3L_1\end{array} &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+y&=&0\\z&=&0\\2z&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&y\\z&=&0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})=\{(y,y,0)\ /\ y\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}((1,1,0))$.
En posant $\boxed{b_1=(1,1,0)}$, la famille (b_1) est génératrice de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})$, et elle est libre car formée d'un vecteur non nul.
$\boxed{(b_1) \text{ est donc une base de } \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}), \text{ qui est donc une droite vectorielle}}$.

• Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{id}) &\iff (M-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}2&-3&2\\1&-2&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}2x-3y+2z&=&0\\x-2y+z&=&0\\-x+y-z&=&0\end{array}\right.\\
L_1\leftrightarrow L_3 &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+y-z&=&0\\x-2y+z&=&0\\2x-3y+2z&=&0\end{array}\right.\\
\begin{array}{r}L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3+2L_1\end{array} &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+y-z&=&0\\-y&=&0\\-y&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&-z\\y&=&0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{id})=\{(-z,0,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}((-1,0,1))=\operatorname{Vect}((1,0,-1))$.
En posant $\boxed{b_2=(1,0,-1)}$, de même,
$\boxed{(b_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{id}), \text{ qui est donc une droite vectorielle}}$.

b) $\dim(\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}))+\dim(\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{id}))=1+1\neq 3=\dim(\mathbb{R}^3)$.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}) \text{ et } \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{id}) \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

3°) a) Soient y et z des réels, on pose $b_3 = (1, y, z)$.

$$\begin{aligned}
f(b_3) = b_2 + 2b_3 &\iff (f - 2\mathrm{id})(b_3) = b_2 \\
&\iff (M - 2I_3)\begin{pmatrix}1\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2 - 3y + 2z = 1 \\ 1 - 2y + z = 0 \\ -1 + y - z = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3y + 2z = -1 \\ -2y + z = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -y = -1 \\ -y = -1 \\ y = z \end{cases} \\
&\iff y = z = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, avec $\boxed{b_3 = (1, 1, 1)}$, on a $f(b_3) = b_2 + 2b_3$.

b) Posons $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, c'est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\det(P) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} = -1$$

(en développant par rapport à C_1).

En particulier $\det(P) \neq 0$, donc P est inversible, donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

4°) a) On a $b_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ donc $(f - \mathrm{id})(b_1) = 0$ i.e. $f(b_1) = b_1$. De même $f(b_2) = 2b_2$, et $f(b_3) = b_2 + 2b_3$. On en déduit :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$$

b) La formule de changement de base donne : $T = P^{-1}MP$. Donc, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} : $\boxed{M = PTP^{-1}}$.

c) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$
$$L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

On en déduit : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}}$.

5°) a) On a $B = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. On obtient $\boxed{B^2 = 0}$.

b) On a donc $A = 2I_2 + B$. Comme B et $2I_2$ commutent, on obtient avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\forall\, n \geq 1,\quad A^n &= (2I_2 + B)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_2)^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 B^k \\ &= 2^n I_2 + n2^{n-1} B \qquad \text{car } B^k = B^2 B^{k-2} = 0 \text{ pour } k \geq 2 \\ &= \begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

C'est encore vrai pour $n = 0$ car $A^0 = I_2$ et car $\begin{pmatrix}2^0 & 0.2^{-1}\\ 0 & 2^0\end{pmatrix} = I_2$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}}$.

6°) a) Soit $R = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $RS = \begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}$ et :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e&f\\0&g&h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&ae+bg&af+bh\\0&ce+dg&cf+dh\end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{S}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{RS}\end{pmatrix}$

b) Remarquons déjà que $T = \begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{A}\end{pmatrix}$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $T^n = \begin{pmatrix}1 & 0\;\,0\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{A^n}\end{pmatrix}$.

- Pour $n=0$, $A^0 = I_2$ donc $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{I_2}} \\ 0 & & \end{array}\right) = I_3 = T^0$: H_0 est vraie.
- Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$T^{n+1} = T \times T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{$\boxed{A}$} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{$\boxed{A^n}$} \\ 0 & \end{pmatrix}$ par HR

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{$\boxed{AA^n}$} \\ 0 & \end{pmatrix}$ en utilisant la question précédente

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{$\boxed{A^{n+1}}$} \\ 0 & \end{pmatrix}$, donc H_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

7°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $M^n = PT^nP^{-1}$
- H_0 est vraie car $M^0 = I_2$ et $PT^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.
- Si, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, H_n est vraie, alors :

$$M^{n+1} = MM^n = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PTI_2T^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

- On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & n2^{n-1} + 2^n \\ 1 & 0 & 2^n \\ 0 & -2^n & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} + n2^{n-1} & 2 - 2^{n+1} - n2^{n-1} & n2^{n-1} + 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ -n2^{n-1} & n2^{n-1} & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Exercice 2

1°) Un tirage est une 4-liste (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'ensemble $\{1, \ldots, 6\}$, où x_1 est le résultat du dé rouge, x_2 le résultat du dé bleu, x_3 le résultat du dé vert, et x_4 le résultat du dé jaune.
Donc, $\boxed{\text{il y en a } 6^4}$.

2°) On note A l'ensemble des tirages faisant apparaître au moins une fois le numéro 6.
Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages ne faisant pas apparaître le numéro 6.
En notant E l'ensemble de tous les tirages possibles, on a : $\text{card}(A) = \text{card}(E) - \text{card}(\overline{A})$.
Un tirage de $\overline{A}$ est une 4-liste de $\{1, \ldots, 5\}$. Ainsi, $\text{card}(\overline{A}) = 5^4$.
Finalement, $\boxed{\text{card}(A) = 6^4 - 5^4}$.

3°) Donnons une méthode permettant d'obtenir une et une seule fois chaque tirage avec deux faces identiques exactement :

★ On choisit le numéro n_0 de la face qui sera obtenue pour deux dés : il y a 6 choix possibles.

★ On choisit les couleurs des dés qui donneront le numéro n_0 : cela revient à choisir une 2-combinaison de l'ensemble $\{rouge, bleu, vert, jaune\}$: $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

★ On choisit les numéros qui seront portés par les deux autres dés, ils doivent être distincts et pris dans $\{1, \ldots, 6\} \backslash \{n_0\}$. Cela revient à choisir un 2-arrangement de cet ensemble à 5 éléments, il y a 5×4 choix possibles.

En tout, $\boxed{6 \times \binom{4}{2} \times 5 \times 4 \text{ tirages possibles}}$.

4°) On note B l'ensemble des tirages tels que la somme des quatre numéros est paire.
On note P l'ensemble des tirages tels que tous les numéros sont pairs, I l'ensemble des tirages tels que tous les numéros sont impairs, et C l'ensemble des tirages tels que deux des numéros sont impairs et deux des numéros sont pairs. P, I et C sont deux à deux disjoints, et $B = P \cup I \cup C$.
Ainsi, $\text{card}(B) = \text{card}(P) + \text{card}(I) + \text{card}(C)$.

★ Pour réaliser un tirage de P, il suffit de choisir une 4-liste de $\{2, 4, 6\}$. Ainsi, $\text{card}(P) = 3^4$.

★ De même, pour réaliser un tirage de I, il suffit de choisir une 4-liste de $\{1, 3, 5\}$ donc $\text{card}(I) = 3^4$.

★ Donnons une méthode permettant d'obtenir une et une seule fois chaque tirage de C :
- On choisit les couleurs des dés qui donneront des numéros pairs : cela revient à choisir une 2-combinaison de l'ensemble $\{rouge, bleu, vert, jaune\}$: $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.
- On choisit les deux numéros pairs pour ces dés : cela revient à choisir une 2-liste de $\{2, 4, 6\}$, il y a 3^2 possibilités.
- Pour chacun des deux dés restants, on choisit des numéros impairs ; cela revient à choisir une 2-liste de $\{1, 3, 5\}$, il y a 3^2 possibilités.

Donc $\text{card}(C) = \binom{4}{2} \times 3^2 \times 3^2$.

Finalement, $\boxed{\text{card}(B) = 2 \times 3^4 + \binom{4}{2} \times 3^2 \times 3^2}$.

Exercice 3

Partie 1 : Généralités en dimension n

1°) $f^3 = \text{id}_E$ donc $\det(f^3) = \det(\text{id}_E)$. Ainsi, $(\det f)^3 = 1$. En particulier, $\det(f) \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.
Remarque : Il y avait d'autres méthodes (montrer l'injectivité à l'aide du noyau, utiliser que $f \circ f^2 = \text{id}_E$ et que $f^2 \circ f = \text{id}_E$, ...).

2°) On sait déjà que $\{0\} \subset G \cap H$ car G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit alors $x \in G \cap H$. Montrons que $x = 0$.
$x \in G$ donc $(f - \text{id}_E)(x) = 0$, i.e. $f(x) = x$.
De même, $x \in H$ donc $f^2(x) + f(x) + x = 0$.
Or, comme $f(x) = x$, on a $f^2(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.
Donc l'égalité $f^2(x) + f(x) + x = 0$ se réécrit $3x = 0$, d'où $x = 0$.
Ainsi, $G \cap H \subset \{0\}$.
Finalement, $\boxed{G \cap H = \{0\}}$.

3°)
- *Méthode 1 :*
Soit $y \in \mathrm{Im}(h)$. Alors il existe un $x \in E$ tel que $y = (f^2 + f + \mathrm{id}_E)(x) = f^2(x) + f(x) + x$.
Montrons que $y \in G$, autrement dit que $f(y) = y$.
Comme f est linéaire, $f(y) = f(f^2(x) + f(x) + x) = f^3(x) + f^2(x) + f(x)$.
Or $f^3 = \mathrm{id}_E$ donc $f(y) = x + f^2(x) + f(x)$ i.e. $f(y) = y$.
Donc $y \in G$.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(h) \subset G}$.
- *Méthode 2 :*
$g \circ h = (f - \mathrm{id}_E) \circ (f^2 + f + \mathrm{id}_E) = f^3 + f^2 + f - (f^2 + f + \mathrm{id}_E) = f^3 - \mathrm{id}_E$, donc $g \circ h = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in E$, $g(h(x)) = 0$ i.e. $h(x) \in \mathrm{Ker}(g)$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$, ce qui s'écrit $\mathrm{Im}(h) \subset G$.

4°) $\mathrm{Im}(h) \subset G$ donc $\dim(\mathrm{Im}\, h) \leq \dim(G)$, donc $\dim(\mathrm{Im}\, h) + \dim(H) \leq \dim(G) + \dim(H)$.
Or, par le théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\, h) + \dim(\mathrm{Ker}(h))$ i.e. $n = \dim(\mathrm{Im}\, h) + \dim(H)$.
On en déduit que $\boxed{n \leq \dim(G) + \dim(H)}$.

5°) D'après la formule de Grassmann :
$\dim(G + H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H) = \dim(G) + \dim(H)$ puisque $G \cap H = \{0\}$.
D'après la question précédente, on a donc $\dim(G + H) \geq n$.
Or $G + H$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim(G + H) \leq n$.
Ainsi $\dim(G + H) = n = \dim(E)$, et comme $G + H$ est un sous-espace vectoriel de E, $E = G + H$.
Comme $G \cap H = \{0\}$, on en déduit que : $\boxed{E = G \oplus H}$.

6°) Soit $x \in H$. Alors $f^2(x) + f(x) + x = 0$.
Montrons que $f(x) \in H$.
On a $(f^2 + f + \mathrm{id}_E)(f(x)) = f^2(f(x)) + f(f(x)) + f(x) = f^3(x) + f^2(x) + f(x)$.
Mais $f^3 = \mathrm{id}_E$ donc $(f^2 + f + \mathrm{id}_E)(f(x)) = x + f^2(x) + f(x) = 0$ puisque $x \in H$.
Ainsi, $f(x) \in H$.
$\boxed{H \text{ est donc stable par } f}$.

7°) On suppose que $f \neq \mathrm{id}_E$.
Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)$ est une matrice diagonale D.

D est de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels.

Comme $f^3 = \mathrm{id}_E$, on a $D^3 = I_n$, i.e. $\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Autrement dit : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i^3 = 1$ i.e. $\varphi(\lambda_i) = \varphi(1)$ avec $\varphi : x \mapsto x^3$.
Comme φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle est injective. Donc on a : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 1$.
Ainsi, $D = I_n$, ce qui signifie que $f = \mathrm{id}_E$: contradiction.
On en déduit qu'$\boxed{\text{il n'existe pas de base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } f \text{ soit diagonale}}$.

Partie 2 : Étude en dimension 2

8°) On suppose que $\dim(G) = 2$.

On a donc : $G \subset E$ et $\dim(E) = \dim(G)$ donc $G = E$ i.e. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E$.

Ce qui signifie que pour tout $x \in E$, $f(x) = x$, donc que $\boxed{f = \mathrm{id}_E}$.

9°) a) D'après la question 5, $E = G \oplus H$ donc en réunissant une base de G et une base de H, on obtient une base de E.

e_1 est un vecteur non nul de G donc il forme une famille libre de G. Comme $\dim(G) = 1$, (e_1) est une base de G.

En réunissant (e_1) et une base de H, on doit obtenir une base de E qui est de dimension 2, donc elle sera de la forme (e_1, e_2), avec (e_2) base de H donc $e_2 \in H$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe bien un vecteur } e_2 \text{ de } H \text{ tel que } \mathcal{B} = (e_1, e_2) \text{ est une base de } E}$.

b) D'après la question 6, H est stable par f. Puisque $e_2 \in H$, il vient $f(e_2) \in H$.

Or (e_2) est une base de H (en effet : $e_2 \neq 0$ sinon (e_1, e_2) ne serait pas une base de E, donc (e_2) est une famille libre de H, et H est de dimension $\dim(E) - \dim(G) = 1$).

Donc $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R}, f(e_2) = \alpha e_2}$.

c) $e_2 \in H$ donc $f^2(e_2) + f(e_2) + e_2 = 0$.

On a $f(e_2) = \alpha e_2$.

En utilisant la linéarité de f : $f^2(e_2) = f(f(e_2)) = f(\alpha e_2) = \alpha f(e_2) = \alpha^2 e_2$.

Ainsi, $\alpha^2 e_2 + \alpha e_2 + e_2 = 0$ i.e. $(\alpha^2 + \alpha + 1).e_2 = 0$.

Comme $e_2 \neq 0$, il vient : $\boxed{\alpha^2 + \alpha + 1 = 0}$.

C'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Le trinôme n'a donc pas de solutions réelles. On aboutit donc à une contradiction puisque $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\text{il n'est pas possible que } \dim(G) = 1}$.

10°) a) D'après la question 5, $E = G \oplus H$, donc $\dim(G) + \dim(H) = \dim(E) = 2$.

Or $\dim(G) = 0$ donc $\dim(H) = 2$.

Comme $H \subset E$ et $\dim(H) = \dim(E)$, on en déduit que $H = E$ i.e. $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E) = E$.

Ainsi, $\boxed{f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0}$.

b) Notons $(*)$ l'égalité $\alpha x + \beta f(x) = 0$.

Appliquons-lui f : on en tire, par linéarité de f, $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = f(0) = 0$.

Or $f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0$ donc $f^2(x) = -f(x) - x$.

Ainsi on obtient $(**)$: $\alpha f(x) - \beta f(x) - \beta x = 0$.

Reprenons $(*)$: $\alpha x = -\beta f(x)$; en multipliant l'égalité par β, on a

$$\alpha\beta x = -\beta^2 f(x).$$

On a aussi, avec $(**)$, $\beta x = \alpha f(x) - \beta f(x)$; en multipliant l'égalité par α, on a

$$\alpha\beta x = \alpha^2 f(x) - \alpha\beta f(x).$$

On en tire que $-\beta^2 f(x) = \alpha^2 f(x) - \alpha\beta f(x)$ i.e. $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) f(x) = 0$.

D'où $\boxed{f(x) = 0 \text{ ou } \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0}$.

c) *Méthode 1*

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \alpha^2 - 2\frac{1}{2}\beta\alpha + \left(\frac{1}{2}\beta\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2$.

Comme α et β sont des réels, $\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)^2$ et $\frac{3}{4}\beta^2$ sont des réels positifs.

Donc, si $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=0$, alors

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\beta\right)^2=0\\ \dfrac{3}{4}\beta^2=0\end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l}\alpha^2=0\\ \beta=0\end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha=\beta=0}$$

Méthode 2
Fixons $\beta\in\mathbb{R}$ et étudions $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$ comme un trinôme du second degré en α.
Le discriminant est $\Delta=(-\beta)^2-4\beta^2=-3\beta^2$.
Si $\beta\neq 0$, alors $\Delta<0$ et $\alpha\mapsto\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, si on a deux réels α et β tels que $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$, nécessairement $\boxed{\beta=0}$, ce qui donne $\alpha^2=0$ et donc $\boxed{\alpha=0}$ également.

d) Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\alpha e_1+\beta f(e_1)=0$.
D'après la question b, on en tire que $f(e_1)=0$ ou que $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$.
Mais d'après la question 1, f est bijective donc injective donc $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$. Si on avait $f(e_1)=0$, on aurait ainsi $e_1=0$, absurde car (e_1,e_2) est libre (c'est une base de E).
On a donc $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$, ce qui implique $\alpha=\beta=0$ d'après la question précédente.
Ainsi, la famille $\mathcal{C}$ est libre.
Comme elle a 2 éléments et que E est de dimension 2, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } E}$.
On a $f(e_1)=0.e_1+1.f(e_1)$, et $f(f(e_1))=f^2(e_1)=-e_1-f(e_1)$ puisque $f^2=-\mathrm{id}_E-f$.
Donc, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{C} \text{ est } M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}}$.

e) $f(e_1)\in E$ et (e_1,e_2) est une base de E donc il existe des réels a et b tels que $\boxed{f(e_1)=ae_1+be_2}$.
Supposons que $b=0$. Alors $f(e_1)=ae_1$. Ainsi, $(e_1,f(e_1))$ est liée. Ceci est exclu puisque $(e_1,f(e_1))$ est une base de E. Donc, $\boxed{b\neq 0}$.

f) *Méthode 1*
Comme $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ et $\mathcal{C}=(e_1,f(e_1))$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est $P=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}$.
Calculons P^{-1}.

$$\begin{array}{ccc}\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix} & L_2\leftarrow\frac{L_2}{b} & \begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & L_1\leftarrow L_1-aL_2 & \begin{pmatrix}1&-\frac{a}{b}\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}\end{array}$$

Donc, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{b}\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$.
Par une formule du changement de bases, $\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(f)=P^{-1}\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)P$, donc $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)=P\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(f)P^{-1}$.
Calculons :

$$\begin{aligned}\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)&=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}P^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}a&-1-a\\b&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{b}\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a&-\frac{a^2}{b}+\frac{-1-a}{b}\\b&-a-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} a & \dfrac{-1-a-a^2}{b} \\ b & -a-1 \end{pmatrix}}$.

Méthode 2

On sait déjà que $f(e_1) = a.e_1 + b.e_2$, ce qui justifie la première colonne de la matrice recherchée.

Déterminons maintenant $f(e_2)$ dans la base (e_1, e_2) : en appliquant f à l'égalité précédente, on obtient, par linéarité de f :

$$\begin{aligned}
f^2(e_1) &= af(e_1) + bf(e_2) \\
-e_1 - f(e_1) &= af(e_1) + bf(e_2) \qquad (\text{puisque } f^2 = -\operatorname{id}_E - f) \\
bf(e_2) &= -e_1 - f(e_1) - af(e_1) \\
bf(e_2) &= -e_1 - (1+a)(a.e_1 + be_2) \\
bf(e_2) &= -(1+a+a^2)e_1 - (1+a)be_2 \\
f(e_2) &= -\frac{1+a+a^2}{b}e_1 - (1+a)e_2 \qquad \text{puisque } b \neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} a & -\dfrac{1+a+a^2}{b} \\ b & -(1+a) \end{pmatrix}}$.