Devoir surveillé 7.

Samedi 13 mai 2023, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge***.
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

On note id l'application identité de E et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1°) On considère, pour tout réel x, $D(x) = \det(M - xI_3)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $D(x)$ directement sous forme factorisée.

b) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

2°) a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$ sont des droites vectorielles. On déterminera des vecteurs b_1 et b_2, tels que (b_1) soit une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et (b_2) soit une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$, et tels que <u>leur première composante soit égale à 1</u>.

b) $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3°) a) Déterminer un vecteur b_3 tel que $f(b_3) = b_2 + 2b_3$ et dont la première composante est 1.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E.

4°) On appelle T la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

a) *Il n'est pas nécessaire d'avoir trouvé les coordonnées des vecteurs b_i pour répondre à cette question.*

Déterminer T, en utilisant une méthode sans calcul.

b) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. À l'aide de P, exprimer M en fonction de T.

c) Déterminer P^{-1}.

5°) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) On pose $B = A - 2I_2$. Calculer B^2.

b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6°) a) Pour $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ sera notée $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\; 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\;R\;} \end{array}\right)$.

Que vaut, pour R et S deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\; 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\;R\;} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\; 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\;S\;} \end{array}\right)$?

b) En déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7°) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on donnera bien ses 9 coefficients).

Exercice 2

On lance quatre dés à 6 faces : un dé rouge, un dé bleu, un dé vert et un dé jaune.

On ne demande pas d'applications numériques. Pour trouver la réponse à une question, il est interdit d'énumérer toutes les possibilités.

1°) Combien y a-t-il de tirages différents ?

2°) Combien y a-t-il de tirages faisant apparaître au moins une fois le numéro 6 ?

3°) Combien y a-t-il de tirages où exactement 2 dés donnent un même résultat ?

4°) Combien y a-t-il de tirages tels que la somme des numéros des quatre dés soit paire ?

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que :

$$f^3 = \mathrm{id}_E$$

f^3 désigne $f \circ f \circ f$.

On note $g = f - \mathrm{id}_E$ et $h = f^2 + f + \mathrm{id}_E$ puis $G = \mathrm{Ker}(g)$ et $H = \mathrm{Ker}(h)$.

Partie 1 : Généralités en dimension n

On suppose dans cette partie que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Justifier que f est bijective.

2°) Montrer que $G \cap H = \{0\}$.

3°) Montrer que : $\mathrm{Im}(h) \subset G$.

4°) En déduire que : $\dim(G) + \dim(H) \geq n$.

5°) Montrer alors que : $E = G \oplus H$.

6°) Montrer que H est stable par f.

7°) Montrer que si $f \neq \mathrm{id}_E$ alors il n'existe pas de base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale.

Partie 2 : Étude en dimension 2

On suppose dans cette partie que E est de dimension 2.

8°) Que dire de f si $\dim(G) = 2$?

9°) On suppose que $\dim(G) = 1$. On note alors e_1 un vecteur non nul de G.

- **a)** Justifier qu'il existe un vecteur e_2 de H tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ soit une base de E.
- **b)** En utilisant la question 6, en déduire que : $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ f(e_2) = \alpha e_2$.
- **c)** Montrer que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ et en déduire une contradiction.

10°) On suppose que $\dim(G) = 0$.

- **a)** Montrer que $f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0$.
- **b)** Soit $x \in E$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\alpha x + \beta f(x) = 0$.
  En utilisant la question précédente, montrer que $f(x) = 0$ ou que $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0$.
- **c)** Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$.
- **d)** Dans toute la suite de l'exercice, on fixe une base quelconque $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E.
  Justifier que $\mathcal{C} = (e_1, f(e_1))$ est une base de E, et écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{C}$.
- **e)** Justifier l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $f(e_1) = ae_1 + be_2$.
- **f)** Montrer alors que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & \dfrac{-1-a-a^2}{b} \\ b & -a-1 \end{pmatrix}$.