Correction du devoir surveillé 6.

Exercice 1

1°)
- Soit p une projection vectorielle de E, c'est bien un endomorphisme de E et $p^2 = p$. Donc $p^3 = p^2 \circ p = p \circ p = p^2 = p$. Donc $\boxed{p \in D}$.
- Soit s une symétrie vectorielle de E, c'est bien un endomorphisme de E et $s^2 = \mathrm{id}_E$. Donc $s^3 = s^2 \circ s = \mathrm{id}_E \circ s = s$. Donc $\boxed{s \in D}$.

2°) On a $\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{id}_E \in \mathcal{D}$.
Par contre $2\,\mathrm{id}_E$ n'est pas dans $\mathcal{D}$ car $2\,\mathrm{id}_E \circ 2\,\mathrm{id}_E \circ 2\,\mathrm{id}_E = 8\,\mathrm{id}_E \neq \mathrm{id}_E$.
Ainsi $\mathcal{D}$ n'est pas stable par la loi $\cdot$; $\boxed{\text{ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$.

3°)
- Si f est une symétrie vectorielle, alors $f \in \mathcal{D}$ d'après la question 1, et $f \in GL(E)$ puisque f est bijective de réciproque f^{-1}.
- Réciproquement, supposons $f \in \mathcal{D} \cap GL(E)$. Alors on a $f^3 = f$, ce qui donne en composant par f^{-1} à gauche :
$$f^2 = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E\,.$$
f est donc une involution et un endomorphisme, donc une symétrie vectorielle.
- On a donc bien montré : $\boxed{f \in \mathcal{D} \cap GL(E) \iff f \text{ est une symétrie vectorielle}}$.

4°) a)
- Comme $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$.
- Soit $y \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$. Alors : $\exists x \in E,\ y = f(x)$, et $f(y) = 0_E$. On a donc :
$$\begin{aligned} f^3(x) &= f\left(f\left(f(x)\right)\right) \\ &= f\left(f(y)\right) \\ &= f(0_E) = 0_E \quad \text{car } f \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$
Or $f \in \mathcal{D}$ donc $f^3(x) = f(x)$. Ainsi $y = 0_E$.
D'où $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$.
- Finalement, $\boxed{\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}}$.

b) $(f^2)^2 = f^4 = f \circ f^3 = f \circ f$ puisque $f \in \mathcal{D}$. Ainsi $(f^2)^2 = f^2$.
De plus, f^2 est un endomorphisme de E donc $\boxed{f^2 \text{ est un projecteur de } E}$.

c)
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g$. Alors $g(x) = 0_E$.
$g^2(x) = g\left(g(x)\right) = g(0_E) = 0_E$, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{Ker}\, g^2$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, g^2$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g^2$. Alors $g^2(x) = 0_E$.
$g^3(x) = g\left(g^2(x)\right) = g(0_E) = 0_E$, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{Ker}\, g^3$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, g^2 \subset \mathrm{Ker}\, g^3$.
- Finalement, $\boxed{\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, g^2 \subset \mathrm{Ker}\, g^3}$.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(g^2)$. Alors y s'écrit $y = g^2(x)$ où $x \in E$. Donc, $y = g(g(x))$ donc y est de la forme $g(x')$ où $x' \in E$. Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(g)$.
On a donc $\mathrm{Im}(g^2) \subset \mathrm{Im}(g)$.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(g^3)$. Alors y s'écrit $y = g^3(x)$ où $x \in E$. Donc, $y = g^2(g(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(g^2)$.
On a donc $\mathrm{Im}(g^3) \subset \mathrm{Im}(g^2)$.
- Finalement, $\boxed{\mathrm{Im}\, g^3 \subset \mathrm{Im}\, g^2 \subset \mathrm{Im}\, g}$.

d)
- On a donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f^3$; mais $f^3 = f$ donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$.
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2}$.
De même, les inclusions pour les images obtenues à la question précédente s'écrivent avec f, sachant que $f^3 = f$: $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. De même, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)}$.

e) Comme f^2 est un projecteur de E, $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f^2$ sont supplémentaires dans E ; donc, d'après la question précédente, $\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

5°) a) Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
h\left(\lambda.(x,y,z)+(x',y',z')\right) &= h\left((\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')\right)\\
&= \left(2(\lambda x+x')-2(\lambda z+z'), -(\lambda y+y'), (\lambda x+x')-(\lambda z+z')\right)\\
&= \left(\lambda(2x-2z)+2x'-2z', \lambda(-y)-y', \lambda(x-z)+x'-z'\right)\\
&= \lambda.\left(2x-2z,-y,x-z\right)+\left(2x'-2z',-y',x'-z'\right)\\
&= \lambda.h(x,y,z)+h(x',y',z').
\end{aligned}$$

Donc h est linéaire. Comme c'est une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, $\boxed{h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

b) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
h^2(x,y,z) = h\left(h(x,y,z)\right) &= (2(2x-2z)-2(x-z), y, (2x-2z)-(x-z))\\
&= (2x-2z, y, x-z)\\
h^3(x,y,z) = h\left(h^2(x,y,z)\right) &= (2(2x-2z)-2(x-z), -y, (2x-2z)-(x-z))\\
&= (2x-2z, -y, x-z)\\
&= h(x,y,z)
\end{aligned}$$

Donc $h^3 = h$. De plus, $h \in \mathcal{L}(E)$. D'où $\boxed{h \in \mathcal{D}}$.

c)
- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} h \iff h(x,y,z) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{l} 2x-2z=0\\ -y=0\\ x-z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=z\\ y=0 \end{array}\right.$$
Donc $\operatorname{Ker} h = \{(z,0,z) \ / \ z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\left((1,0,1)\right)$.
La famille $((1,0,1))$ est donc génératrice de $\operatorname{Ker} h$, et comme elle est constituée d'un seul vecteur non nul, elle est libre. Donc $\boxed{((1,0,1)) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} h}$.
- En notant (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(h) &= \operatorname{Vect}(h(e_1),h(e_2),h(e_3))\\
&= \operatorname{Vect}((2,0,1),(0,-1,0),(-2,0,-1))\\
&= \operatorname{Vect}((2,0,1),(0,-1,0)) \text{ car le 3ème vecteur est colinéaire au premier}
\end{aligned}$$
La famille $((2,0,1),(0,-1,0))$ est donc génératrice de $\operatorname{Im} h$, et comme elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Donc $\boxed{((2,0,1),(0,-1,0)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} h}$.

d) D'après la question 4.e, puisque h est un élément de $\mathcal{D}$, on peut dire que
$\boxed{\operatorname{Ker} h \text{ et } \operatorname{Im} h \text{ sont supplémentaires dans } E = \mathbb{R}^3}$.
De plus, d'après la question 4.d et 4.b, $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} h^2$, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} h^2$, et h^2 est une projection ; c'est donc p, la projection sur $\operatorname{Im} h$ parallèlement à $\operatorname{Ker} h$.
D'après un calcul précédent, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{p(x,y,z) = (2x-2z, y, x-z)}.$$

Exercice 2

1°) Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+Q) &= \frac{1}{2}((\lambda P+Q)(X+1)+(\lambda P+Q)(X))\\
&= \frac{1}{2}(\lambda P(X+1)+Q(X+1)+\lambda P(X)+Q(X))\\
&= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire. De plus, φ va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Donc, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

2°) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(X^0) = \varphi(1) = 1$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\varphi(X^k) &= \frac{1}{2}((X+1)^k + X^k) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i + X^k\right) \qquad \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{1}{2}\left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i + X^k\right) \\
&= X^k + R \quad \text{ avec } R = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i \text{ de degré} \leq k-1
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\deg\left(\varphi(X^k)\right) = k}$ et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$ est $\boxed{1}$.

3°) φ_n est linéaire car φ l'est.

Soit alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$. P s'écrit : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$\varphi_n(P) = \varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi(X^k)$ par linéarité de φ. Comme tous les $\varphi(X^k)$ ont pour degré k, on en déduit que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

4°) a) La famille $(\varphi_n(1), \ldots, \varphi_n(X^n))$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés donc est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, elle a $n+1$ éléments et $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

b) φ_n est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$ et transforme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ en une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

5°) ★ Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $P \in \operatorname{Ker}\varphi_n$. Or φ_n est injective puisque bijective. Ainsi, $P = 0$.

On a montré $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$. Comme l'autre inclusion est toujours vraie, on a donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

Ainsi, $\underline{\varphi \text{ est injective.}}$

★ Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme φ_n est surjective, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \varphi_n(P)$. On a donc : $Q = \varphi(P)$.

Donc, $\underline{\varphi \text{ est surjective.}}$

On en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

6°) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P(X+1) + P(X) = \frac{2X^n}{n!} \iff \varphi_n(P) = \frac{X^n}{n!}$$

Comme $\dfrac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}_n[X]$ et comme φ_n est bijective de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\dfrac{X^n}{n!}$ possède un unique antécédent E_n dans $\mathbb{R}_n[X]$, autrement dit $\boxed{\text{le polynôme } E_n \text{ existe et est unique}}$.

— Dans le cas $n = 0$, on a $E_0 \in \mathbb{R}_0[X]$. S'il n'était pas de degré 0, on aurait $E_0 = 0$ mais alors $\varphi_0(E_0) = 0 = \dfrac{X^0}{0!} = 1$, absurde.

— Dans le cas $n \geq 1$, si E_n n'était pas de degré n, on aurait $E_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc on aurait $\dfrac{X^n}{n!} = \varphi(E_n) = \varphi_{n-1}(E_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: absurde.

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{\deg(E_n) = n}$.

7°) a) $E_n(X)+E_n(X+1) = \dfrac{2X^n}{n!}$ donc, en remplaçant X par 0, $E_n(0)+E_n(1) = \dfrac{2.0^n}{n!}$ i.e. $\boxed{E_n(0)+E_n(1)=0}$ puisque $n \geq 1$.

b) $E_n(X)+E_n(X+1) = \dfrac{2X^n}{n!}$. En dérivant cette égalité entre polynômes, on obtient :
$E_n'(X)+E_n'(X+1) = \dfrac{2X^{n-1}}{(n-1)!}$.
Comme $E_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $E_n' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par unicité de E_{n-1}, il vient : $\boxed{E_n' = E_{n-1}}$.

8°) ★ $\varphi(1) = 1 = \dfrac{X^0}{0!}$, et $1 \in \mathbb{R}_0[X]$, donc par unicité de E_0, il vient $\boxed{E_0 = 1}$.

★ E_1 vérifie : $E_1' = E_0 = 1$. Donc, E_1 s'écrit : $E_1 = X + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
De plus, $E_1(0)+E_1(1) = 0$ donc $1+2\alpha = 0$ donc $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{E_1 = X - \dfrac{1}{2}}$.

★ E_2 vérifie $E_2' = E_1 = X - \dfrac{1}{2}$. Ainsi, E_2 s'écrit : $E_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$.
De plus, $E_2(0)+E_2(1) = 0$ donc $2\beta = 0$ ie $\beta = 0$. Ainsi, $\boxed{E_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}}$.

Exercice 3

1°) $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ est une famille génératrice de F, donc $\boxed{\dim(F) \leq n+1}$.

2°) Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k = 0$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\cos(x)\right)^k = 0$.

Posons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$: on a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)$ est racine de P. Autrement dit, tous les réels de $[-1,1]$ sont racines de P. Ainsi P a une infinité de racines, c'est le polynôme nul. Ses coefficients sont donc tous nuls : $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Ainsi $\boxed{\text{la famille } (p_0, p_1, \ldots, p_n) \text{ est libre}}$.

Or cette famille est génératrice de G, c'est donc une base de G, donc $\boxed{\dim(G) = n+1}$.

3°) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos^N(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\left(e^{ix}\right)^k\left(e^{-ix}\right)^{N-k} \text{ par la formule du binôme}$$
$$= \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} e^{ikx}e^{i(k-N)x}$$
$$\boxed{\cos^N(x) = \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} e^{i(2k-N)x}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\cos^N(x) = \mathrm{Re}\left(\cos^N(x)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} e^{i(2k-N)x}\right)$$
$$= \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\mathrm{Re}\left(e^{i(2k-N)x}\right)$$
$$\cos^N(x) = \frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\cos\left((2k-N)x\right)$$

Ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $p_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^N}\binom{N}{k} c_{2k-N}$, avec $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ pour $k \leq 0$.

Pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, $0 \leq 2k \leq 2N$ donc $-N \leq 2k - N \leq N$. Mais, comme cos est paire, pour tout entier p, $c_p = c_{-p}$, donc on a écrit p_N comme combinaison linéaire de $c_0, \ldots, c_N$. Autrement dit, $\boxed{p_N \in F}$.

c) Ainsi, pour tout $N \in \{0, \ldots, n\}$, $p_N \in F$; comme F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\mathrm{Vect}(p_0, \ldots, p_n) \subset F$ i.e. $\boxed{G \subset F}$.

4°) On a donc $\dim(G) \leq \dim(F)$.
Ainsi $n + 1 = \dim(G) \leq \dim(F) \leq n + 1$ d'après les questions 1 et 2.
Les inégalités qui apparaissent sont donc des égalités, en particulier $\dim(G) = \dim(F)$.
Puisqu'on a $G \subset F$ d'après la question 3, on en tire que $\boxed{G = F}$.

5°) On a donc $F \subset G$; en particulier, $c_n \in G = \mathrm{Vect}(p_0, \ldots, p_n)$, c'est-à-dire qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $c_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k$.

Ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x) = T_n(\cos(x))$ en posant $\boxed{T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k}$.

$\boxed{\text{Le polynôme } T_n \text{ obtenu est bien dans } \mathbb{R}_n[X]}$.

Exercice 4

1°) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$, $\boxed{f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$

$f^{(3)}(x) = -2\frac{(1+x^2)^2 - 4 \times 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -2\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3}$

Donc $\boxed{f^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}}$.

b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $H_n : \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$

★ Pour $n = 1$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Donc, en posant comme polynôme $P_1(X) = 1$, H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n vraie. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2)^n - 2nxP_n(x)(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2) - 2nxP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

On pose : $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X)$.

Alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien : $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit un polynôme Q_n vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} = \dfrac{Q_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, P_n(x) = Q_n(x)$. Ainsi, le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. Ainsi, les polynômes P_n et Q_n sont égaux.

$\boxed{\text{D'où l'unicité de } P_n}$.

d) $\boxed{P_1(X) = 1}$.

En utilisant la relation de récurrence de la question 1b, on a :

$\boxed{P_2(X) = -2XP_1(X) = -2X}$.

$P_3(X) = (1+X^2)(-2) - 4X(-2X) = \boxed{6X^2 - 2}$.

$\boxed{\text{Ce résultat est bien cohérent avec ce qu'on a trouvé à la question 1a.}}$

e) Soit, pour tout $n \geq 2$, la propriété

$$H_n : \exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X],\ P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n.$$

★ $P_2(X) = -2X$; comme $(-1)^{2-1}2! = -2$, en posant $Q_2 = 0$, on a bien $Q_2 \in R_{2-2}[X]$ et $P_2 = (-1)^{2-1}\, 2! X^{2-1} + Q_2$. Ainsi, H_2 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un $n \geq 2$ fixé.
Soit alors $Q_n \in \mathbb{R}\,[X]$ tel que $P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n$.
On a alors, puisque $n \geq 2$, $P_n' = (-1)^{n-1} n!(n-1)X^{n-2} + Q_n'$, et $\deg(Q_n') \leq \deg(Q_n) - 1 \leq n-3$.

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1+X^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X) \\
&= (1+X^2)\left((-1)^{n-1}n!(n-1)X^{n-2} + Q_n'\right) - 2nX\left((-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n\right) \\
&= \left((-1)^{n-1}n!(n-1) - 2n(-1)^{n-1}n!\right) X^n + (1+X^2)Q_n' - 2nXQ_n \\
&= (-1)^{n-1}n! \left(\underbrace{n-1-2n}_{-(n+1)}\right) X^n + (1+X^2)Q_n' - 2nXQ_n \\
&= (-1)^n(n+1)!X^n + Q_{n+1} \quad \text{en posant } Q_{n+1} = (1+X^2)Q_n' - 2nXQ_n
\end{aligned}$$

On a bien $Q_{n+1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $\deg((1+X^2)Q_n') = 2 + \deg(Q_n') \leq 2 + n - 3 = n-1$, et $\deg(-2nXQ_n) = 1 + \deg(Q_n) \leq n-1$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que :

$\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ P_n \text{ est de degré } n-1 \text{ et de coefficient dominant } (-1)^{n-1}\, n!}$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $H_n : \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$.

★ $f^{(0)} = f = \text{Arctan}$ est impaire donc,
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(-x) = f(-x) = -f(x) = (-1)^{0+1} f^{(0)}(x)$.
Donc, H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.
Par H_n, pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$.
En dérivant (puisque f est de classe C^∞) :
$\forall x \in \mathbb{R},\ -f^{(n+1)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x)$ i.e. $f^{(n+1)}(-x) = (-1)^{n+2} f^{(n+1)}(x)$.
Donc, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)}$.

g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que n est pair. On déduit de la question précédente que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$ i.e. $f^{(n)}(-x) = -f^{(n)}(x)$ car $n+1$ est impair.
Ainsi, la fonction $f^{(n)}$ est impaire.
On en déduit que $f^{(n)}(0) = 0$ (car $f^{(n)}(-0) = -f^{(n)}(0)$ donc $f^{(n)}(0) = -f^{(n)}(0)$).
Or $f^{(n)}(0) = P_n(0)$ par 1b. Donc, $\boxed{P_n(0) = 0}$.

2°) a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, H_n : P_n = \dfrac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}((X-i)^n - (X+i)^n)$.

★ $\dfrac{i(-1)^0 0!}{2}((X-i)^1 - (X+i)^1) = \dfrac{i}{2}(-2i) = 1 = P_1$ donc H_1 est vraie.

★ Supposons que H_n est vraie pour un rang n fixé ≥ 1.

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1+X^2)P_n'(X) - 2nXP_n(X) \\
&= (\underbrace{1+X^2}_{(X+i)(X-i)})\frac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left(n(X-i)^{n-1} - n(X+i)^{n-1}\right) \\
&\qquad\qquad - 2nX\frac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}((X-i)^n - (X+i)^n) \\
&= \frac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}[n(X-i)^n(X+i) - n(X+i)^n(X-i) \\
&\qquad\qquad -2nX(X-i)^n + 2nX(X+i)^n] \\
&= \frac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left[n(X-i)^n(\underbrace{X+i-2X}_{-(X-i)}) - n(X+i)^n(\underbrace{X-i-2X}_{-(X+i)})\right] \\
&= \frac{i(-1)^n n!}{2}\left((X-i)^{n+1} - (X+i)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{P_n = \frac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}((X-i)^n - (X+i)^n)}$$

b) On suppose que n est impair.

$P_n = \dfrac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}((X-i)^n - (X+i)^n) = i\dfrac{(n-1)!}{2}((X-i)^n - (X+i)^n)$ car $n-1$ est pair.

Donc, $P_n(0) = \dfrac{i(n-1)!}{2}((-i)^n - i^n) = \dfrac{i(n-1)!}{2}((-1)^n i^n - i^n)$

$P_n(0) = \dfrac{i(n-1)!}{2}(-2i^n)$ car n est impair.

Ainsi, $P_n(0) = -(n-1)! i \times i^n$.

n s'écrit $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$. Donc, $i^n = i^{2k+1} = i^{2k} \times i = (i^2)^k \times i = (-1)^k i$.

Donc, $P_n(0) = -(n-1)!(-1)^k i^2 = (-1)^k (n-1)!$.

Or $k = \dfrac{n-1}{2}$ donc $\boxed{P_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ \frac{z-i}{z+i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z - i = (z+i)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)
\end{aligned}$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1 \iff k = 0$, et pour $k = 0$, l'équation devient $0 = 2i$: exclu. Ainsi :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\},\ z = \frac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}.$$

Or pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\dfrac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)} = \dfrac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}\,2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

Les valeurs trouvées sont des réels donc en particulier sont distinctes de $-i$.

Ainsi, $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont } \left\{ -\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} / k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. par 3a, $P_n(-i) = \dfrac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}(-2i)^n \neq 0$. Donc on peut supposer $z \neq -i$.

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff (z-i)^n = (z+i)^n \\ &\iff \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 \text{ car } z \neq -i \end{aligned}$$

On en déduit par la question précédente que les racines de P_n sont exactement les nombres $\boxed{x_k = -\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}}$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Ce sont bien des réels.

Justifions que les x_k sont distincts 2 à 2.
Soit $f : x \mapsto -\dfrac{\cos x}{\sin x}$ définie sur l'intervalle $]0, \pi[$. Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et, pour tout $x \in]0, \pi[$, $f'(x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} > 0$.
f est strictement croissante sur $]0, \pi[$ donc est injective.
Les angles $\dfrac{k\pi}{n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ sont distincts 2 à 2 et sont éléments de $]0, \pi[$ donc les nombres $f\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ sont distincts 2 à 2 pour $1 \leq k \leq n-1$.
Ainsi, $\boxed{\text{les } x_k \text{ sont distincts 2 à 2.}}$

e) P_n est de degré $n-1$ et a pour coefficient dominant $(-1)^{n-1}n!$. De plus, P_n admet $n-1$ racines distinctes réelles $x_1, \dots x_{n-1}$ avec $x_k = -\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ donc P_n est scindé sur $\mathbb{R}$, ses racines sont toutes de multiplicité 1 et on a :

$$\boxed{P_n = (-1)^{n-1}n! \prod_{k=1}^{n-1}(X - x_k) = (-1)^{n-1}n! \prod_{k=1}^{n} \left(X + \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$$

3°) Soit $n \geq 2$. $P_n(0) = (-1)^{n-1}n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

Donc, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{P_n(0)}{(-1)^{n-1}n!} = \frac{(-1)^{n-1}P_n(0)}{n!}$.

Si n est pair alors $P_n(0) = 0$. Donc, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = 0$.

Si n est impair, on a vu dans 2b que : $P_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$.
En utilisant le fait que $(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{-\frac{n-1}{2}}$, on obtient :
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{(-1)^{n-1-\frac{n-1}{2}}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$.

Finalement, $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$