Devoir surveillé 6.

Samedi 8 avril 2023, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit au singleton $\{0_E\}$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f^3 = f$ ie $f \circ f \circ f = f$.

1°) Vérifier que toutes les projections et symétries vectorielles de E sont dans $\mathcal{D}$.

2°) Prouver que $\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

3°) On rappelle que $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E.
Prouver l'équivalence :

$$f \in \mathcal{D} \cap GL(E) \iff f \text{ est une symétrie vectorielle}$$

4°) Soit f un élément de $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

b) Montrer que f^2 est un projecteur de E.

c) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.
Justifier que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2 \subset \operatorname{Ker} g^3$.
Obtenir également des inclusions entre $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Im} g^2$ et $\operatorname{Im} g^3$.

d) En déduire $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

e) $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans E ?

5°) Un exemple : Désormais, on pose $E = \mathbb{R}^3$. On définit l'application h par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, h(x, y, z) = (2x - 2z, -y, x - z)$$

a) Prouver que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Prouver que h est élément de $\mathcal{D}$.

c) Déterminer des bases de $\operatorname{Ker} h$ et de $\operatorname{Im} h$.

d) Sans utiliser la question 5.c et en utilisant la question 4, justifier que $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$ sont supplémentaires dans E, et, en notant p la projection sur $\operatorname{Im} h$ parallélement à $\operatorname{Ker} h$, déterminer l'expression de $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = Q \text{ où } Q(X) = \frac{1}{2}(P(X+1) + P(X))$$

Par exemple pour $P = X^2$, $\varphi(P) = \frac{1}{2}((X+1)^2 + X^2) = X^2 + X + \frac{1}{2}$.

1°) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2°) Pour $k \in \mathbb{N}$, quel est le degré et le coefficient dominant de $\varphi(X^k)$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note φ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$.

3°) Vérifier que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4°) **a)** Montrer que la famille $(\varphi_n(1), \varphi_n(X), \dots, \varphi_n(X^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5°) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

6°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme $E_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$E_n(X+1) + E_n(X) = \frac{2X^n}{n!}$$

Quel est son degré ?

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $E_n(0) + E_n(1) = 0$.

b) Montrer que $E_n' = E_{n-1}$.

8°) Déterminer E_0, puis, à l'aide de la question précédente, déterminer E_1 et E_2.

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(kx) \end{array} \quad \text{et} \quad p_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^k(x) \end{array}$$

et on note

$$F = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, \dots, c_n) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(p_0, p_1, \dots, p_n)$$

Le but de cet exercice est de montrer que $F = G$.

1°) Sans calcul, quelle inégalité peut-on affirmer sur $\dim(F)$?

2°) Montrer que la famille $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ est libre.
Indication : au cours du raisonnement, on s'aidera d'un polynôme.
Qu'en déduire sur $\dim(G)$?

3°) Soit N un entier tel que $0 \leq N \leq n$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^N(x) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} e^{i(2k-N)x}$.

b) En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^N(x) = \mathrm{Re}\left(\cos^N(x)\right)$, montrer que $p_N \in F$.

c) En déduire que $G \subset F$.

4°) Conclure.

5°) *Application* :
Montrer qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

Exercice 4

L'objet de ce problème est l'étude des dérivées successives de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$.

1°) Forme de la dérivée d'ordre n

a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

Au cours de la preuve, on obtiendra une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n *et* P'_n.

c) Justifier l'unicité de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Expliciter les polynômes P_1, P_2, P_3.
Vérifier la cohérence des résultats des questions 1a et 1b.

e) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, P_n est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n-1}n!$.

f) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$.

g) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est pair alors $P_n(0) = 0$.

2°) Les racines du polynôme P_n

a) Montrer en utilisant la relation de récurrence de 1b que, pour tout $n \geq 1$,

$$P_n = \frac{i(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}((X-i)^n - (X+i)^n)$$

Dans la suite, n *désigne un entier* ≥ 2.

b) En déduire que : si n est impair alors $P_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n = 1$.

d) En déduire que les racines du polynôme P_n sont exactement les réels $x_k = -\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, et que ces réels sont distincts 2 à 2.

e) Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

3°) Une application

Établir la formule suivante, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$