Correction du devoir surveillé 5.

Exercice 1

1°) a) Par le calcul : $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Donc, $\boxed{A^2 = -A}$.

b) On a $\boxed{M = I + 4A}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: H_n : $\exists u_n \in \mathbb{R}$, $M^n = I + u_n A$.

★ $M^0 = I$ donc, en posant $u_0 = 0$, on a bien $M^0 = I + u_0 A$. Donc H_0 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= (I + u_n A) \times (I + 4A) \\ &= I + (4 + u_n)A + 4u_n A^2 \\ &= I + (4 - 3u_n)A \qquad \text{car } A^2 = -A \end{aligned}$$

On pose : $u_{n+1} = 4 - 3u_n$. Alors H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence qu'il existe une suite u de réels telle que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + u_n A.}$$

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

On résout, pour $\ell \in \mathbb{R}$, l'équation : $\ell = 4 - 3\ell \iff \ell = 1$.

On pose alors : $\ell = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell = u_n - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant la différence membre à membre des 2 lignes suivantes :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & 4 - 3u_n \\ \ell & = & 4 - 3\ell \\ \hline u_{n+1} - \ell & = & -3(u_n - \ell) \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -3v_n$: (v_n) est une suite géométrique de raison -3 .

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-3)^n v_0 = (-3)^n(u_0 - 1) = -(-3)^n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-3)^n}$.

On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + (1 - (-3)^n)A}$.

d) Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 + 7L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$I_3 \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_1 \leftarrow \dfrac{L_1}{4} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

On a transformé M par opérations élémentaires sur les lignes en I_3.

Ainsi, $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}}$.

e) Pour $n = -1$, l'expression de 1c donne

$$I + (1 - (-3)^{-1})A = I + \left(1 + \frac{1}{3}\right) A = I + \frac{4}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\text{L'expression de 1c est encore valable pour } n = -1}$.

2°) a) Par calcul, $\boxed{J^2 = J}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n : J^n = J$.

★ On a bien $J^1 = J$ donc H_1 est vraie.

★ Si H_n est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors $J^{n+1} = J^n J = JJ = J$ d'après ci-dessus, donc H_{n+1} est vraie.

★ Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = J}$.

b) En posant $\boxed{a = -3, b = 4}$, on a bien : $\boxed{M = aI + bJ}$.

Or $4J$ et $-3I$ commutent, donc d'après la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k I^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k + \binom{n}{0} (-3)^n J^0 \qquad \text{car } n \geq 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J + (-3)^n I \qquad \text{grâce à la question précédente} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J + (-3)^n I \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - \binom{n}{0} (-3)^n \right) J + (-3)^n I \\
&= \left((4-3)^n - (-3)^n \right) J + (-3)^n I \qquad \text{par la formule du binôme dans } \mathbb{R} \\
&= \boxed{\left(1 - (-3)^n\right) J + (-3)^n I}
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, $\left(1 - (-3)^0\right) J + (-3)^0 I = 0.J + I = I = M^0$, donc la formule est encore vraie pour $n = 0$.

Exercice 2

Partie 1 : Généralités

1°) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \lambda \in \mathbb{R}$. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Tr est linéaire}}$.

2°) ★ Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$ (i.e. $A = yE_{1,1}$). Alors, $\mathrm{Tr}(A) = y$.

Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $y = \mathrm{Tr}(A)$, donc $\boxed{\text{Tr est surjective}}$.

★ On constate que $n = \mathrm{Tr}(I_n)$ et aussi que $\mathrm{Tr}(nE_{1,1}) = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} = n$.

On a : $\mathrm{Tr}(I_n) = \mathrm{Tr}(nE_{1,1})$ et $I_n \neq nE_{1,1}$ puisque $n \neq 1$. Donc, $\boxed{\text{Tr n'est pas injective}}$.

3°) A et ${}^{\mathrm{t}}A$ ont exactement la même diagonale donc la même trace : $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}A)}$.

4°) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Par une récurrence élémentaire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(D^p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p}$.

5°) **a)** Posons $C = AB$. On note $C = (c_{i,j})$. On a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right)$,

donc $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i}}$.

b) Posons $D = BA$. On note $D = (d_{i,j})$. En intervertissant les $\sum$ dans le résultat précédent :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \right) \qquad \text{car } \times \text{ est commutative dans } \mathbb{R} \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_{j,j} \qquad \text{car } D = BA \\ &= \mathrm{Tr}(D)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$.

c) Par l'absurde, supposons qu'il existe des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $AB - BA = I_n$.
Alors, $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_n)$.
Par linéarité de Tr et puisque $\mathrm{Tr}(I_n) = n$: $\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = n$.
Or $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ par la question précédente donc $0 = n$: exclu.
Ainsi, $\boxed{\text{il n'est pas possible de trouver deux matrices } A \text{ et } B \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } AB - BA = I_n}$.

6°) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}((PB)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(PB))$ par 5b.
Or, $P^{-1}(PB) = (P^{-1}P)B = B$.
Donc, $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)}$.

Partie 2 : Calcul des puissances de certaines matrices

7°) On pose $\boxed{U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$.

Alors, $U\,{}^{\mathrm{t}}V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$. On a bien : $\boxed{A = U\,{}^{\mathrm{t}}V}$.

8°) $A^2 = (U\,{}^{\mathrm{t}}V)(U\,{}^{\mathrm{t}}V) = U(\underbrace{{}^{\mathrm{t}}VU}_{\lambda \in \mathbb{R}})\,{}^{\mathrm{t}}V = \lambda U\,{}^{\mathrm{t}}V = \lambda A$.

Or, $\lambda = {}^{\mathrm{t}}VU = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \mathrm{Tr}(A)$.

Ainsi, $\boxed{A^2 = \mathrm{Tr}(A).A}$.

9°) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note H_p : $A^p = (\mathrm{Tr}(A))^{p-1}.A$.

★ Pour $p = 1$: $(\mathrm{Tr}(A))^{1-1}.A = A = A^1$. Donc H_1 est vraie.

★ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_p est vraie.

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \times A \\ &= (\mathrm{Tr}(A))^{p-1}.A \times A \\ &= (\mathrm{Tr}(A))^{p-1}.A^2 \\ &= (\mathrm{Tr}(A))^{p}.A \qquad \text{car } A^2 = \mathrm{Tr}(A).A \end{aligned}$$

Donc, H_{p+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = (\mathrm{Tr}(A))^{p-1}.A}$.

Partie 3 : Une application définie à l'aide de la trace

10°) a)

$$\begin{aligned} \varphi(B, A) &= \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}BA) \\ &= \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}BA)) \qquad \text{par 3} \\ &= \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}B)) \\ &= \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB) \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(B, A) = \varphi(A, B)}$$

b) On suppose que A est symétrique et B antisymétrique.
$\varphi(A,B) = \text{Tr}({}^{\text{t}}AB) = \text{Tr}(AB)$ car ${}^{\text{t}}A = A$.
$\varphi(B,A) = \text{Tr}({}^{\text{t}}BA) = \text{Tr}(-BA)$ car ${}^{\text{t}}B = -B$.
Comme Tr est linéaire, $\varphi(B,A) = -\text{Tr}(BA)$.
Or, par 5b, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ donc $\varphi(B,A) = -\text{Tr}(AB) = -\varphi(A,B)$.
Mais on a aussi, par la question précédente, $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$.
Donc, $2\varphi(A,B) = 0$ i.e. $\boxed{\varphi(A,B) = 0}$.

11°) a) $\varphi(A,A) = \text{Tr}({}^{\text{t}}AA) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}$ en notant $A' = {}^{\text{t}}A$ et $B = A'A$.

$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a'_{i,k}a_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,i}$.

Ainsi, $\boxed{\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2\right)}$.

b) $\forall (k,i) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ a_{k,i} \in \mathbb{R}$ donc $a_{k,i}^2 \geq 0$. Donc, $\boxed{\varphi(A,A) \geq 0}$.

c) On suppose que $\varphi(A,A) = 0$. Alors, $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2\right) = 0$.
Comme, pour tout $(k,i) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $a_{k,i}^2 \geq 0$, on en déduit que : $\forall (k,i) \in \{1,\ldots,n\}^2$, $a_{k,i} = 0$.
Ainsi, A est la matrice nulle.
On en déduit que : $\boxed{\varphi(A,A) = 0 \implies A = 0}$.

Partie 4 : Résolution d'une équation

12°) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\text{Tr}(X + \text{Tr}(X).I_n) = \text{Tr}(X) + \text{Tr}(X).\text{Tr}(I_n)$ par linéarité de Tr.
Donc, $\boxed{\text{Tr}(X + \text{Tr}(X).I_n) = (n+1)\text{Tr}(X)}$.

13°) *On va raisonner par analyse/synthèse.*
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

★ Supposons que X est solution de $(*)$ i.e. $X + \text{Tr}(X).I_n = B$.
Alors, en passant à la trace, $\text{Tr}(X + \text{Tr}(X).I_n) = \text{Tr}(B)$
Donc, par la question précédente, $(n+1)\text{Tr}(X) = \text{Tr}(B)$.
Comme $n+1 \neq 0$, il vient : $\text{Tr}(X) = \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}$.
Or $X = B - \text{Tr}(X).I_n$. Donc, $X = B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}.I_n$.
On a montré que s'il y a une solution, elle est unique.

★ Réciproquement, on pose $X = B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}.I_n$. Alors $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
De plus, $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(B) - \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}.n = \text{Tr}(B)\left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}$.
Ainsi, $X + \text{Tr}(X).I_n = B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}.I_n + \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}.I_n = B$.
Donc X est solution de $(*)$.

Finalement, $\boxed{\text{il y a une seule solution à l'équation } (*) : B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{n+1}.I_n}$.

Exercice 3

1°) $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme quotient de fonctions de classe C^∞.

2°) a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, H_n : $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}}$.

★ $\forall x > 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{0 + 1.\ln x}{x}$.
On pose : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Alors, H_0 est vraie.

★ Supposons que H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$:
$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}}$.
En dérivant, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) &= \frac{\frac{b_n}{x} x^{n+1} - (a_n + b_n \ln x)(n+1)x^n}{x^{2n+2}} \\ &= \frac{b_n - (a_n + b_n \ln x)(n+1)}{x^{n+2}} \\ &= \frac{b_n - (n+1)a_n - (n+1)b_n \ln x}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

On pose : $a_{n+1} = b_n - a_n(n+1)$ et $b_{n+1} = -(n+1)b_n$. Alors, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}}}$.

b) Soient a'_n, b'_n des réels tels que : $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}} = \dfrac{a'_n + b'_n \ln x}{x^{n+1}}$.
On pose $x = 1$. Alors $a_n = a'_n$.
On pose $x = e$. Alors $\dfrac{a_n + b_n}{e^{n+1}} = \dfrac{a_n + b'_n}{e^{n+1}}$. D'où $a_n + b_n = a_n + b'_n$ puis $b_n = b'_n$.
D'où $\boxed{\text{l'unicité de } a_n \text{ et } b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3°) $f = \ln \times u$,de plus ln et u sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) u^{(n-k)}(x) \\ &= \ln x \times u^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln x}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{(k-1)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}} \\ &\qquad \text{car } \ln^{(k)} = (\ln')^{(k-1)} = u^{(k-1)} \text{ pour } k \geq 1 \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln x}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \ln x}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{n-1}(k-1)!(n-k)!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln x}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par unicité de a_n et b_n, il vient : $\boxed{a_n = (-1)^{n-1} n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } b_n = (-1)^n n!}$.

Exercice 4

1°) a) $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. C'est une limite finie donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=1}$. Comme, par ailleurs, f est également continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient, on obtient que $\boxed{f \text{ ainsi prolongée est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

b)
- f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x(1+o(x)) - x + o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} o(1)$$

Ainsi, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
L'information trouvée plus haut se réécrit donc : $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$. Ainsi f' est continue en 0.
Comme, par ailleurs, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient, on obtient que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

2°) a) g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ comme produit et différence de fonctions dérivables.
Et, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$.
Or sin est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, donc $g' \leq 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
Ainsi g est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
Comme $g(0)=0$, $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0,\ g(x) \leq 0}$.

b) $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et $f'(0)=0$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0,\ f'(x) \leq 0}$.

3°) Par quotient, h est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, et pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$,

$$h'(x) = \frac{\cos(x)x^2 - \sin(x)2x}{(x^2)^2} = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3} = \frac{g(x) - \sin(x)}{x^3}$$

Or, sur $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $x^3 > 0$, $-\sin(x) < 0$ et $g(x) \leq 0$, donc $h'(x) < 0$.
Ainsi h est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
De plus, cette fonction est continue sur cet intervalle. Par le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ sur $J = \left[h\left(\dfrac{\pi}{3}\right), \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)\right[$.
$h(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x+o(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 1$ car $0 < \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 1$ et car $3 < \pi$.

Ainsi, $1 \in J$. Donc $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ tel que } h(\alpha) = 1}$.

4°) φ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ par somme. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$:

$$\varphi'(x) = g'(x) + 2Cx = -x\sin x + 2Cx = x(2C - \sin x).$$

Or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ donc $0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} = 2C$, d'où $\varphi'(x) \geq 0$.

Ainsi, φ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

De plus $\varphi(0) = 0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right],\ \varphi(x) \geq 0}$.

5°) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$; comme $f'(x)$ est négatif, $|f'(x)| = -f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$.
On sait que : $\varphi(x) \geq 0$ donc $g(x) + Cx^2 \geq 0$ ie $-g(x) \leq Cx^2$.

Comme $x^2 > 0$, il vient : $-\frac{g(x)}{x^2} \leq -C$. Finalement $\boxed{|f'(x)| \leq C}$.

C'est encore vrai pour $\underline{x = 0.}$

6°) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : u_n existe et $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

★ H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
Ainsi, u_n existe et $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}_+$, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
De plus, $f' \leq 0$ donc f décroît sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $f(0) \geq f(u_n) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Or $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} \geq 0$.
Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq 1 \leq \frac{\pi}{3}$. Donc, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{3}.}$

b) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $|f'(x)| \leq C$.
Donc, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et α sont dans $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq C|u_n - \alpha|$.
Or $f(u_n) = u_{n+1}$, et comme $h(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha^2} = 1$, on a $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \alpha$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq C|u_n - \alpha|.}$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : $|u_n - \alpha| \leq C^n$.

★ $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha$ car $\alpha \geq 0$. Or $h(\alpha) = 1$ i.e. $\sin(\alpha) = \alpha^2$. On en tire que $\alpha^2 \leq 1$, donc $\alpha \leq 1$.
Ainsi $|u_0 - \alpha| = \alpha \leq 1 = C^0$, H_0 est vraie.

★ On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.
$|u_{n+1} - \alpha| \leq C|u_n - \alpha|$. Or $|u_n - \alpha| \leq C^n$ par H_n.
Comme $C \geq 0$, il vient : $|u_{n+1} - \alpha| \leq C^{n+1}$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq C^n}$.

d) $C = \frac{\sqrt{3}}{4}$ donc $-1 < C < 1$. Ainsi, $C^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc, par le théorème d'encadrement, $(u_n - \alpha)$ converge vers 0. Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.