Devoir surveillé 5.

Samedi 11 mars 2023, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, par deux méthodes différentes.
On notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1°) *Première méthode*

On pose $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$.

a) Vérifier que $A^2 = -A$.

b) Exprimer M en fonction de A et I puis en déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + u_n A.$$

Dans le raisonnement, on obtiendra une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, puis M^n en fonction de I et A.

d) Justifier que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.

e) Vérifier que l'expression trouvée dans 1c est encore valable pour $n = -1$.

2°) *Deuxième méthode*

Soit J la matrice : $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^2 puis en déduire J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer des réels a et b tels que $M = aI + bJ$.
En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de I et de J.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Ainsi, $\mathrm{Tr}(A)$ est la somme des coefficients diagonaux de la matrice A. C'est donc un réel.

$\mathrm{Tr}(A)$ est appelée *trace de la matrice A*.

On définit ainsi une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$$

Remarque : Les parties 2, 3, 4 sont indépendantes entre elles.

Partie 1 : Généralités

1°) Montrer que Tr est linéaire.

2°) Justifier que Tr est surjective, non injective.

3°) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Tr}(A)$.

4°) Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale à coefficients réels, d'ordre n.

Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(D^p)$ en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

5°) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}$.

b) En intervertissant les deux $\sum$, en déduire que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

c) *Application* : Montrer qu'il n'est pas possible de trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

6°) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Partie 2 : Calcul des puissances de certaines matrices

Soit $x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_n$ des réels.

Soit $A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$ i.e. $A = (x_iy_j)_{1 \le i,j \le n}$.

7°) Déterminer deux matrices colonnes U et V telles que : $A = U\,{}^{\mathrm{t}}V$.

8°) Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A).A$.

9°) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et $\mathrm{Tr}(A)$.

Partie 3 : Une application définie à l'aide de la trace

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$.

10°) **a)** Montrer que $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$.

b) On suppose que A est symétrique et B antisymétrique, montrer que $\varphi(A,B) = 0$.

11°) On note $A = (a_{i,j})$.

a) Exprimer $\varphi(A,A)$ en fonction des coefficients de A.

b) Montrer que $\varphi(A,A) \geq 0$.

c) Montrer que $\varphi(A,A) = 0 \implies A = 0$.

Partie 4 : Résolution d'une équation

12°) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{Tr}(X + \mathrm{Tr}(X).I_n)$.

13°) Soit B une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ suivante, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(*) \ : \ X + \mathrm{Tr}(X).I_n = B.$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0, \ f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Le but de cet exercice est de trouver la forme de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f par deux méthodes indépendantes.

1°) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) *Première méthode* :

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \ln x}{x^{n+1}}$.
On donnera une relation de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n.

b) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'unicité de a_n et b_n.

3°) *Deuxième méthode* :
On pose, pour tout $x > 0$, $u(x) = \dfrac{1}{x}$.
Dans cette question, on utilisera le résultat suivant (ne pas le démontrer) :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $u^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.
Calculer, par la formule de Leibniz, $f^{(n)}(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$.
Le résultat final fera apparaître la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *que l'on n'essaiera pas de calculer.*

4°) En combinant les deux méthodes, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n et b_n en fonction de n et de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

1°) a) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera encore f.

b) Montrer, à l'aide de la méthode utilisant le moins de calculs , que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

2°) On pose, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$g(x) = x \cos x - \sin x.$$

a) Étudier le signe de g (au sens large).

b) En déduire le signe de f' sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (au sens large).

3°) On pose, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$h(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

Justifier que l'équation $h(x) = 1$ possède une unique solution sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$, que l'on notera α.
Indication : On pensera à utiliser le signe de g.

4°) On définit la constante $C = \frac{\sqrt{3}}{4}$. On pose, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$\varphi(x) = x \cos x - \sin x + Cx^2.$$

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\varphi(x) \geq 0$.

5°) Déduire des questions 2 et 4 que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], |f'(x)| \leq C$.

6°) On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq C|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n$.

d) Démontrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?