Devoir surveillé 4.

Samedi 28 janvier 2023, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\forall\, x \in [0,1],\ f(x) = 2xe^x$.

1°) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ dans un ensemble que l'on déterminera.
On note f^{-1} la bijection réciproque de f.
Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1}.

b) Vérifier qu'il existe un unique réel α dans $[0,1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$.
Justifier que $\alpha \neq 0$.

c) Résoudre, pour $x \in [0,1]$: $(E) : f(x) = x$ et $(I) : f(x) > x$.

2°) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0,1]$.

b) Montrer que la suite est strictement monotone à l'aide de la question 1.c.

c) Montrer que la suite est convergente, et préciser sa limite à l'aide de la question 1.c.

3°) On se propose de préciser ce résultat en montrant que $(2^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie non nulle.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.

c) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
On note L sa limite. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.

e) Déterminer la limite de $(2^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\ln x}$.

2°) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$ en 0 .

3°) Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}}$.
Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ que l'on déterminera.
Étudier les positions relatives.

Exercice 3

On admet provisoirement que les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (*)$$

sont les fonctions $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha \ln x \end{array}$ où α est un réel.

Ce résultat sera démontré à part, dans la partie 3 (qui est donc indépendante des deux premières parties).

Partie 1 : Étude de deux suites

Soient a et b des réels tels que $0 < a \leq b$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \\ v_0 = b \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right.$$

1°) Justifier que les suites (u_n) et (v_n) existent et sont à termes strictement positifs.

2°) Établir l'inégalité suivante : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \dfrac{2xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

3°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

4°) Montrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante.

5°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_{n+1} \leq \dfrac{\alpha_n}{2}$.

b) En déduire que la suite (α_n) converge vers 0.

6°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.

7°) On définit la suite (w_n) par : $w_n = u_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Justifier que la suite (w_n) est constante et en déduire que $\ell = \sqrt{ab}$.

Partie 2 : Une équation fonctionnelle

Dans cette question, on considère une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) = f(x) + f(y) \qquad (**) \end{cases}$$

8°) Soient deux réels a et b tels que $0 < a \leq b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies comme dans la partie 1.
Soit alors la suite (z_n) définie par : $z_n = f(u_n) + f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite (z_n) est constante.

9°) Soient deux réels a et b tels que $0 < a \leq b$. Montrer que :

$$2f(\sqrt{ab}) = f(a) + f(b)$$

Justifier que ce résultat est valable pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

10°) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$2f(\sqrt{t}) = f(t).$$

11°) À l'aide des deux questions précédentes, montrer que f est de la forme $x \mapsto \alpha \ln x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Partie 3 : Preuve du résultat provisoirement admis

12°) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $(*)$: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

a) Montrer que $f(1) = 0$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $f(t^n) = nf(t)$.

c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$: $f(t^{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{p} f(t)$.

d) On pose $\alpha = f(e)$.
Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(e^r) = \alpha r$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $y = \ln(x)$, de sorte que $x = e^y$.
Montrer que $f(x) = \alpha y$.

13°) Montrer que l'ensemble des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues vérifiant $(*)$ est

$$\{x \mapsto \alpha \ln(x) \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4

On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-1}{1-\overline{z}} \end{array}$$

1°) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $|f(z)| = 1$.
f est-elle surjective ?

2°) Résoudre l'équation $f(z) = 1$.
f est-elle injective ?

3°) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

4°) Soit θ un réel fixé. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, on note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
Montrer que l'équation $f(z) = e^{i\theta}$ est équivalente à :

$$(E) \ : \ x \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Quelle est la nature de l'ensemble des solutions de cette équation ?
En déduire $f(\mathbb{C}\backslash\{1\})$.