Correction du devoir surveillé 3.

Exercice 1

Partie 1 : Résultats préliminaires

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{2-(-2)}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.}$$

2°) **a)** On sait que ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1 > 0$, donc $\boxed{\text{th est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

b) Par quotient de fonctions dérivables, th est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}.$$

3°) $\mathrm{ch}(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \dfrac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{10}{3 \times 2} = \boxed{\dfrac{5}{3}}$;

$\mathrm{sh}(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \dfrac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{8}{3 \times 2} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$.

Donc $\mathrm{th}(\ln 3) = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$.

Partie 2 : Étude d'une première suite

4°) ch est continue et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n$ est bien définie et continue sur le segment $[0, \ln 3]$. Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe}}$.

5°)

$$u_0 = \int_0^{\ln 3} 1 \, \mathrm{d}x = [x]_0^{\ln 3} = \boxed{\ln 3}.$$

D'après les question 2.b et 3

$$u_2 = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \, \mathrm{d}x = [\mathrm{th}(x)]_0^{\ln 3} = \mathrm{th}(\ln 3) - \mathrm{th}(0) = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

($\mathrm{th}(0) = 0$ car $\mathrm{sh}(0) = 0$).

6°) On a $u_1 = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}\,\mathrm{d}x$ d'après la question 1.

On pose $t = \mathrm{sh}(x)$; la fonction sh est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln 3]$.

On a alors $\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$.

Si $x = 0$, $t = 0$, et si $x = \ln 3$, $t = \dfrac{4}{3}$ d'après la question 3.

Ainsi, par changement de variable :

$$u_1 = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{\frac{4}{3}} = \boxed{\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)}.$$

7°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+2} = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^{n}}\frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Posons $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{ch}(x))^n} = (\mathrm{ch}(x))^{-n}$ et $g = \mathrm{th}$.

Ce sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln 3]$, et pour tout $x \in [0, \ln 3]$,

$$f'(x) = -n\,\mathrm{sh}(x)\,(\mathrm{ch}(x))^{-n-1} = \frac{-n\,\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{ch}(x))^{n+1}} \qquad g'(x) = \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^2}.$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \left[\frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^n}\,\mathrm{th}(x)\right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} \frac{-n\,\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{ch}(x))^{n+1}}\,\mathrm{th}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(\mathrm{ch}(\ln 3))^n}\,\mathrm{th}(\ln 3) - \frac{1}{(\mathrm{ch}(0))^n}\,\mathrm{th}(0) + n\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{ch}(x))^{n+1}}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n}\frac{4}{5} + n\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{ch}^2(x)-1}{(\mathrm{ch}(x))^{n+2}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x) - 1 \text{ par la question 1} \\
&= \frac{4\times 3^n}{5^{n+1}} + n\int_0^{\ln 3} \left(\frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^n} - \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^{n+2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\times 3^n}{5^{n+1}} + n\int_0^{\ln 3} \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\ln 3} \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^{n+2}}\,\mathrm{d}x \\
u_{n+2} &= \frac{4\times 3^n}{5^{n+1}} + nu_n - nu_{n+2} \\
(n+1)u_{n+2} &= \frac{4\times 3^n}{5^{n+1}} + nu_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+2} = \frac{4\times 3^n}{(n+1)5^{n+1}} + \frac{n}{n+1}u_n.}$$

8°) **a)** Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \mathrm{sh}(x) - x, \quad f''(x) = \mathrm{ch}(x) - 1.$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, et la valeur 1 est atteinte uniquement en 1.

Donc $f'' \geq 0$ et f'' ne s'annule qu'en 0.

On en tire que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $f'(0) = 0$, donc on en déduit le signe de f' et les variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, f possède un minimum en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}}.$$

b) *Méthode 1*

Pour $n = 0$, l'inégalité est évidente (c'est une égalité).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$ d'après la question précédente.

Comme $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $(\operatorname{ch}(x))^n \geq \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)^n$.

Or, d'après la formule du binôme de Newton, $\left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k$.

Les deux premiers termes de cette somme (on a $n \geq 1$) sont :

$\dbinom{n}{0}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^0 = 1$ et $\dbinom{n}{1}\dfrac{x^2}{2} = n\dfrac{x^2}{2}$.

Les autres termes éventuels sont positifs, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \geq 1 + n\frac{x^2}{2}$.

Ainsi, on a bien $\boxed{\operatorname{ch}^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2}}$.

Méthode 2

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: $\operatorname{ch}^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2}$.

- Pour $n = 0$, $(\operatorname{ch}(x))^0 = 1$ et $1 + n\dfrac{x^2}{2} = 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

  On a donc $\operatorname{ch}^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2}$, et d'après la question précédente, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Puisque tout est positif, on peut multiplier ces inégalités :

  $$\operatorname{ch}^n(x)\operatorname{ch}(x) \geq \left(1 + n\frac{x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1 + n\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

  $$\text{d'où } \operatorname{ch}^{n+1}(x) \geq 1 + (n+1)\frac{x^2}{2} \text{ car } \frac{x^4}{4} \geq 0$$

  Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \operatorname{ch}^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2}, \text{ ceci pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in [0, \ln 3]$, on a $\operatorname{ch}^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2} > 0$, donc $0 \leq \dfrac{1}{\operatorname{ch}^n(x)} \leq \dfrac{1}{1 + n\dfrac{x^2}{2}}$.

Par croissance de l'intégrale sur $[0, \ln 3]$:

$$0 \leq \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1 + n\dfrac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+n\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\ln 3} = \sqrt{\frac{2}{n}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\ln 3\right).$

On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\ln 3\right).}$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\leq \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\ln 3\right) \leq \frac{\pi}{2}$.

Donc, comme $\sqrt{\frac{2}{n}} \geq 0$, $\sqrt{\frac{2}{n}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\ln 3\right) \leq \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

Comme $\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Partie 3 : Étude d'une seconde suite

9°) Soit $q \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{n}(-q)^k = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1-(-q)}$ car $-q \neq 1$ puisque $q \in \mathbb{R}_+$.

Donc, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^k = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} = \frac{1+(-1)^n q^{n+1}}{1+q}}$ car n et $n+2$ ont même parité.

10°) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède (on a bien $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \in \mathbb{R}_+$),

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}^k(x)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^k = \frac{1+(-1)^n\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1}(x)}\,\frac{\mathrm{ch}^{n+1}(x)+(-1)^n}{\mathrm{ch}(x)+1}.$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}^k(x)} = \frac{\mathrm{ch}^{n+1}(x)+(-1)^n}{\mathrm{ch}^n(x)(\mathrm{ch}(x)+1)}}$.

11°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\ln 3}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}^k(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{ch}^{n+1}(x)+(-1)^n}{\mathrm{ch}^n(x)(\mathrm{ch}(x)+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{par la question précédente} \\
&= \int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)+1}\,\mathrm{d}x + (-1)^n\int_0^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)(\mathrm{ch}(x)+1)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_n = v_0 + (-1)^n v_{n+1}.}$$

12°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in [0, \ln 3]$, $1+\mathrm{ch}(x) \geq \mathrm{ch}\,x$ et $\mathrm{ch}^{n-1}(x) \geq 0$ Donc $\mathrm{ch}^{n-1}(x)(\mathrm{ch}\,x+1) \geq \mathrm{ch}^n\,x$.

Comme les termes sont strictement positifs, il vient : $0 \leq \frac{1}{\mathrm{ch}^{n-1}(x)(\mathrm{ch}\,x+1)} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}^n\,x}$.

Par croissance de l'intégrale, $0 \leq \displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{ch}^{n-1}(x)(\mathrm{ch}\,x+1)}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{ch}^n\,x}\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\boxed{0 \leq v_n \leq u_n}$.

Or par la question 8d, (u_n) converge vers 0.

Donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } 0.}$

13°) a) *Méthode 1 :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{t^2+1}{t(t+1)^2} = \frac{(t^2+2t+1)-2t}{t(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2-2t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{2}{(t+1)^2}.$$

$\boxed{\text{On pose } a = 1 \text{ et } b = -2}$. Alors, $\boxed{\text{pour } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}, \frac{t^2+1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)^2}}$.

Méthode 2 :

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Soit a et b des réels.

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)^2} = \frac{a(t+1)^2 + bt}{t(t+1)^2} = \frac{at^2 + t(2a+b) + a}{t(t+1)^2}.$$

Pour que $\frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)^2} = \frac{t^2+1}{t(t+1)^2}$, <u>il suffit</u> que $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ i.e. $a = 1$ et $b = -2$.

b)

$$\begin{aligned} v_0 &= \int_0^{\ln 3} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 1} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+1+2e^x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}+1}{e^x(e^x+1)^2} e^x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On pose $t = e^x$, $x \mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $[0, \ln 3]$.

On note : $\mathrm{d}t = e^x \, \mathrm{d}x$.

Si $x = 0$ alors $t = 1$

Si $x = \ln 3$ alors $t = 3$.

Par le théorème du changement de variables, $v_0 = \displaystyle\int_1^3 \frac{t^2+1}{t(t+1)^2} \, \mathrm{d}t$.

Par la question précédente, $v_0 = \displaystyle\int_1^{\ln 3} \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) \mathrm{d}t = [\ln |t|]_1^3 + 2 \left[\frac{1}{t+1} \right]_1^3$.

Donc, $v_0 = \ln 3 + 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)$.

Finalement, $\boxed{v_0 = \ln 3 - \frac{1}{2}}$.

14°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = v_0 + (-1)^n v_{n+1}$ par 11.

(v_n) converge vers 0 donc la suite (v_{n+1}) converge vers 0.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $v_{n+1} \geq 0$, donc $-v_{n+1} \leq (-1)^n v_{n+1} \leq v_{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, la suite $((-1)^n v_{n+1})$ converge vers 0.

Finalement, par somme, (I_n) converge vers v_0 i.e. $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } \ln 3 - \frac{1}{2}}$.

Exercice 2

Notons $I =]-1,1[$ et $(E) : (1-x^2)y'(x) + xy(x) = x^2 - 1$.
Pour tout $x \in I$, $1 - x^2 \neq 0$, donc sur I, $(E) \iff y'(x) + \dfrac{x}{1-x^2}y(x) = -1$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- Résolution de l'équation homogène $(H) : y'(x) + \dfrac{x}{1-x^2}y(x) = 0$:
  Pour tout $x \in I$, $\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{-1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$.
  Donc une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left(|1-x^2|\right)$ i.e. $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$.
  Les solutions de (H) sur I sont les $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}$, i.e. les $x \mapsto \lambda\sqrt{1-x^2}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante :
  On pose $y_p : x \mapsto \lambda(x)\sqrt{1-x^2}$, avec $\lambda : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
  Sur I, $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition et par produit, y_p est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$y_p'(x) = \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} + \lambda(x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

  On résout :

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \quad &\iff \forall\, x \in I, \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2}\lambda(x)\sqrt{1-x^2} = -1 \\ &\iff \forall\, x \in I,\quad \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} = -1 \\ &\iff \forall\, x \in I,\quad \lambda'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ car } x \mapsto 1-x^2 \text{ ne s'annule pas sur } I \end{aligned}$$

  Prenons $\lambda : x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$; alors $y_p : x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)\sqrt{1-x^2}$ est une solution particulière de (E) sur I.
- Conclusion :

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto (\lambda + \operatorname{Arccos}(x))\sqrt{1-x^2},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Question préliminaire :

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ est bien définie et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sera une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et calculons $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{-1}{t^2}(\ln t - 1)\,\mathrm{d}t$.
Les fonctions $u : t \mapsto \ln t - 1$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \dfrac{-1}{t^2}$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left[\frac{1}{t}(\ln t - 1)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}(\ln x - 1) + 1 + \int_1^x \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 + \left[\frac{1}{t}\right]_1^x \\
&= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{\ln x}{x}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} \text{ est une primitive de } x \mapsto \dfrac{1-\ln x}{x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

1°) a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $y : x \mapsto x^\alpha$. y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (H) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - x\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1)\,x^\alpha = 0 \\
&\iff \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \text{ car pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha \neq 0 \\
&\iff (\alpha-1)^2 = 0 \\
&\iff \alpha = 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\alpha = 1}$ est la seule valeur pour laquelle $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de l'équation (H).

b) On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Comme y et $x \mapsto x$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, par quotient, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = xz(x), \qquad y'(x) = xz'(x) + z(x), \qquad y''(x) = xz''(x) + 2z'(x).$$

$$\begin{aligned}
&y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 1 - \ln(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x^3z''(x) + 2x^2z'(x) - x^2z'(x) - xz(x) + xz(x) = 1 - \ln x \\
&\iff \boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ z''(x) + \frac{1}{x}z'(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{y \text{ vérifie } (E) \text{ si et seulement si } z \text{ vérifie } (E') : z''(x) + \dfrac{1}{x}z'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^3}}$

c) (E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est ln, donc les solutions de l'équation homogène associée sont les

$$x \mapsto \lambda \exp(-\ln x),\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{i.e.} \quad x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

- On recherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante : On pose : $Z_p : x \mapsto \lambda(x)\dfrac{1}{x}$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Z_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $Z_p'(x) = \lambda'(x)\dfrac{1}{x} - \lambda(x)\dfrac{1}{x^2}$. On résout :

$$\begin{aligned}
Z_p \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x)\frac{1}{x} - \lambda(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\lambda(x)\frac{1}{x} = \frac{1-\ln x}{x^3} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{1-\ln x}{x^3} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}
\end{aligned}$$

Prenons $\lambda : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$; c'est alors une primitive de $x \mapsto \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ d'après la question préliminaire, donc $Z_p : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ est une solution particulière de (E_1).

- Les solutions de (E_1) sont donc les : $\boxed{x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

d) Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, en reprenant les notations de la question b :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff z' \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \\
&\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x} - \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\
&\iff \exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = \lambda \ln x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \mu \\
&\qquad\qquad \text{car } \mathbb{R}_+^* \text{ est un intervalle et grâce à la question préliminaire} \\
&\iff \exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x \ln x - \ln x - 1 + \mu x
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les $\boxed{x \mapsto \lambda x \ln x - (\ln x + 1) + \mu x \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$.

2°) a) La fonction w est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions deux fois dérivables.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$w(t) = y(e^t), \qquad w'(t) = e^t.y'(e^t), \qquad w''(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(e^t).$$

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 1 - \ln(x) \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R},\ (e^t)^2 y''(e^t) - e^t y'(e^t) + y(e^t) = 1 - \ln(e^t) \quad \text{car exp est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R},\ (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(e^t) - 2e^t y'(e^t) + y(e^t) = 1 - t \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R},\ w''(t) - 2w'(t) + w(t) = 1 - t \\
\iff & w \text{ solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

b) (E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont l'unique solution est 1.
  Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E_2) sont les $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t$ où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Posons maintenant $w_p : t \mapsto at + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors w_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w_p'(t) = a$, $w_p''(t) = 0$. On résout :

$$\begin{aligned}
w_p \text{ solution de } (E_2) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, 0 - 2a + at + b = 1 - t \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b - 2a = 1 \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

- Les solutions de (E_2) sont donc les $\boxed{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t - t - 1 \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$

c) Pour $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, en reprenant les notations de la question b :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = (\lambda t + \mu)e^t - t - 1 \\
&\iff \exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ w(\ln x) = (\lambda \ln x + \mu)e^{\ln x} - \ln x - 1 \\
&\qquad \text{car ln est une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R} \\
&\iff \exists\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \lambda x \ln x + \mu x - \ln x - 1
\end{aligned}$$

On retrouve que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $\boxed{x \mapsto \lambda x \ln x - (\ln x + 1) + \mu x \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$.