Devoir surveillé 3.

Samedi 3 décembre 2022, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge***.
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Partie 1 : Résultats préliminaires

1°) Justifier la formule : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

2°) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

a) Pourquoi th est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$?

b) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

3°) Donner les valeurs de $\mathrm{ch}(\ln 3)$ et $\mathrm{sh}(\ln 3)$ sous forme simplifiée. En déduire $\mathrm{th}(\ln 3)$.

Partie 2 : Étude d'une première suite

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n \mathrm{d}x$.

4°) Justifier que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5°) Calculer u_0 et u_2.

6°) Calculer la valeur de u_1 à l'aide du changement de variables $t = \mathrm{sh}(x)$.

7°) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{4 \times 3^n}{(n+1)5^{n+1}} + \frac{n}{n+1} u_n.$$

8°) a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^n(x) \geq 1 + n\dfrac{x^2}{2}$.

c) En déduire, en utilisant la croissance de l'intégrale, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\ln 3\right)$.

d) En déduire que (u_n) converge vers 0.

Partie 3 : Étude d'une seconde suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^{n-1}(x)(\mathrm{ch}(x)+1)} \mathrm{d}x$.

9°) Soient $q \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k$.

10°) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\mathrm{ch}^k(x)}$.

11°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = v_0 + (-1)^n v_{n+1}$.

12°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq u_n$.
En déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

13°) a) Montrer qu'il existe des réels a et b que l'on déterminera tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ \frac{t^2+1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{(t+1)^2}.$$

b) En déduire v_0 à l'aide du changement de variables $t = e^x$.

14°) Justifier que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

Résoudre $(1-x^2)y' + xy = x^2 - 1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 3

Question préliminaire :
Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (on utilisera une intégration par parties).

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$(E) : x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x).$$

Le but de cet exercice est de résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, par deux méthodes indépendantes.

1°) Première méthode

a) On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E).
Montrer qu'il existe un unique réel α, que l'on déterminera, tel que $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x^\alpha}$, où α est le réel obtenu à la question précédente.
Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z vérifie (E') sur $\mathbb{R}_+^*$, où (E') est une équation différentielle que l'on déterminera.

c) Résoudre l'équation $(E_1) : Z'(x) + \dfrac{1}{x}Z(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Deuxième méthode

a) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $w(t) = y(e^t)$.
Montrer :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \iff w \text{ solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R},$$

où $(E_2) : w''(t) - 2w'(t) + w(t) = 1 - t$.

b) Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.