Correction du devoir surveillé 2.

Exercice 1

1°) On résume dans un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
F_n	0	1	1	2	3	5	8

2°) a) Pour $n \geq 2$, on note $H_n : F_n \geq n-1$.

★ $F_2 = 1 \geq 1$ et $F_3 = 2 \geq 2$ Donc H_2 et H_3 sont vraies.

★ Soit $n \geq 2$ fixé. On suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies. Montrons que H_{n+2} l'est aussi. $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Or par H_n et H_{n+1}, $F_{n+1} \geq n$ et $F_n \geq n-1$ donc, par somme, $F_{n+2} \geq 2n-1$.
Or $(2n-1)-(n+1) = n-2 \geq 0$ car $n \geq 2$, donc $F_{n+2} \geq n+1$: H_{n+2} est vraie.

★ On a montré par récurrence double que : $\boxed{\forall n \geq 2, F_n \geq n-1}$.

b) $n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, pour tout $n \geq 2, F_n \geq n-1$ donc $\boxed{F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

3°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

★ Pour $n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1$.
D'autre part, $F_1 F_2 = 1$. Donc H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 \\ &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \qquad \text{par } H_n \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2} \qquad \text{par définition de la suite}\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.

★ Pour $n = 0$, on a $F_1^2 - F_0 F_2 = 1 - 0 \times 1 = 1 = (-1)^0$. Donc H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \\ &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= -(-1)^n \qquad \text{par } H_n \\ &= (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ Conclusion : on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} F_k &= \sum_{k=0}^{n}(F_{k+2} - F_{k+1}) \\ &= F_2 - F_1 + F_3 - F_2 + F_4 - F_3 + \cdots + F_{n+2} - F_{n+1} \\ &= -F_1 + F_{n+2} \qquad \text{(somme téléscopique)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1}$$

4°) a) $2n$, $2n+1$ et $2n+2$ sont des indices supérieurs ou égaux à 2 donc, par la question 2a, $F_{2n} \geq 2n - 1$ donc $F_{2n} \geq 1$. De même, $F_{2n+1} \geq 2n \geq 2$, $F_{2n+2} \geq 2n+1 \geq 3$.
Ainsi, $\dfrac{1}{F_{2n}}, \dfrac{1}{F_{2n+1}}, \dfrac{1}{F_{2n+2}}$ existent. De plus, Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc A_n et B_n existent.
De plus, on a : $0 < \dfrac{1}{F_{2n}} \leq 1$, $0 < \dfrac{1}{F_{2n+1}} < 1$ et $0 < \dfrac{1}{F_{2n+2}} < 1$.
Comme Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que $\text{Arctan}(0) = 0$ et que $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$:
$0 < \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right) \leq \frac{\pi}{4}$, $0 < \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) < \dfrac{\pi}{4}$, $0 < \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right) < \dfrac{\pi}{4}$.
Ainsi, $0 < A_n \leq \dfrac{\pi}{4}$ et $0 < B_n < \dfrac{\pi}{2}$.
Donc, $\boxed{A_n \text{ et } B_n \text{ sont dans } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$.

b) Simplifions $\tan(B_n)$:

$$\begin{aligned}\tan(B_n) &= \frac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right) + \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right)\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}}\frac{1}{F_{2n+2}}} \\ &= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} \\ &= \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n}) - 1} \\ &= \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+1}^2 + F_{2n+1}F_{2n} - 1}\end{aligned}$$

Or, par 3b, $F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = (-1)^{2n} = 1$ donc $F_{2n+1}^2 = 1 + F_{2n}F_{2n+2}$.

$$\begin{aligned}\tan(B_n) &= \frac{F_{2n+3}}{F_{2n}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n}} \\ &= \frac{F_{2n+3}}{F_{2n}(F_{2n+1} + F_{2n+2})}\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(B_n) = \frac{1}{F_{2n}}} \qquad \text{car } F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3}$$

c) tan est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et A_n et B_n sont dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc

$$A_n = B_n \iff \tan(A_n) = \tan(B_n)$$

$\tan(A_n) = \tan\left(\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \dfrac{1}{F_{2n}}$
Donc, par la question précédente, $\tan(A_n) = \tan(B_n)$. On en déduit que $\boxed{A_n = B_n}$.

d) Pour $n=1$, sachant les valeurs de F_2, F_3 et F_4 :

$\text{Arctan}(1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$ i.e. $\boxed{\frac{\pi}{4} = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)}$.

Pour $n=2$: $\boxed{\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)}$

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\
&= \text{Arctan}\,(1) + \sum_{k=1}^{n}\left[\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k}}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+2}}\right)\right] \qquad \text{par 4c} \\
&= \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{F_2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{F_4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{F_4} - \text{Arctan}\,\frac{1}{F_6} + \cdots + \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n}} - \text{Arctan}\,\frac{1}{F_{2n+2}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \qquad \text{(somme télescopique)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)}$$

6°) Par la question 2b, $F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $F_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, $\frac{1}{F_{2n+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{Arctan}(0) = 0$ donc, par composition, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement, $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}}$.

7°) Le trinôme $x^2 - x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ donc les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
$1 - \sqrt{5} < 0$ et $1 + \sqrt{5} > 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{il y a un unique réel positif } \varphi \text{ tel que } \varphi^2 = \varphi + 1.}$ On a : $\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

$$\varphi + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

On a bien : $\boxed{\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}}$.

8°) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^n}\right)$.

★ $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^0 + \frac{(-1)}{\varphi^0}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = F_0$ donc H_0 est vraie.
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^1 + \frac{(-1)^2}{\varphi^1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1$ par la question précédente.
Or $F_1 = 1$ donc H_1 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies. Montrons que H_{n+2} est vraie.

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} + \frac{(-1)^{n+2}}{\varphi^{n+1}} + \varphi^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}+\varphi^n+(-1)^{n+1}\left(-\frac{1}{\varphi^{n+1}}+\frac{1}{\varphi^n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n(\varphi+1)+(-1)^{n+1}\frac{-\varphi+\varphi^2}{\varphi^{n+2}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2}+(-1)^{n+1}\frac{1}{\varphi^{n+2}}\right) \qquad \text{car } \varphi^2=\varphi+1\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2}+\frac{(-1)^{n+3}}{\varphi^{n+2}}\right) \qquad \text{car } n+1 \text{ et } n+3 \text{ ont même parité}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+2} est vraie.

★ On a montré par récurrence double que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n+\frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^n}\right)}$.

9°) Soit $n\in\mathbb{N}$. Par la question 8,

$$F_nx^n = x^n\times\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n+\frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^n}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((x\varphi)^n-\left(-\frac{x}{\varphi}\right)^n\right)$$

$x\varphi\in[0,1[$ donc $(x\varphi)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\left|-\frac{x}{\varphi}\right|=\frac{x}{\varphi}\leq\frac{1}{\varphi^2}<1$ car $\varphi>1$. Donc $-1<-\frac{x}{\varphi}<1$ donc $\left(-\frac{x}{\varphi}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par opérations, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_nx^n=0}$.

10°) a) Soit n un entier ≥ 2.

$$\begin{aligned}
(1-x-x^2)T_n(x) &= (1-x-x^2)\sum_{k=0}^n F_kx^k=\sum_{k=0}^n F_kx^k-\sum_{k=0}^n F_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^n F_kx^{k+2}\\
&= \sum_{j=0}^n F_jx^j-\sum_{j=1}^{n+1}F_{j-1}x^j-\sum_{j=2}^{n+2}F_{j-2}x^j\\
&= \sum_{j=2}^n(\underbrace{F_j-F_{j-1}-F_{j-2}}_{=0})x^j \ + \ F_0x^0+F_1x^1-F_0x^1-F_nx^{n+1}-F_{n-1}x^{n+1}-F_nx^{n+2}\\
&= x-(F_n+F_{n-1})x^{n+1}-F_nx^{n+2}
\end{aligned}$$

$\boxed{(1-x-x^2)T_n(x)=x-F_{n+1}x^{n+1}-F_nx^{n+2}}$

b) Si $x=0$, on a bien $1-x-x^2\neq 0$.
Sinon, on a $1-x-x^2=x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)=x^2P\left(\frac{1}{x}\right)$ où P est le trinôme du second degré X^2-X-1, dont les racines sont $\varphi>0$ et un nombre négatif. Comme $0<x<\frac{1}{\varphi}$, on a $\frac{1}{x}>\varphi$, donc $\frac{1}{x}$ n'est pas racine de P.
Finalement, dans tous les cas, $1-x-x^2\neq 0$.
On pouvait aussi déterminer les racines de $1-X-X^2$ pour le prouver.
Par la question 10a, $T_n(x)=\frac{x-F_{n+1}x^{n+1}-F_nx^{n+2}}{1-x-x^2}$.
Par ailleurs, par la question 9, $F_{n+1}x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, $F_nx^{n+2}=x^2\times F_nx^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, par opérations sur les limites $\boxed{T_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{x}{1-x-x^2}}$.

Ainsi, $\boxed{\ell(x)=\frac{x}{1-x-x^2}}$.

Exercice 2

1°) $r\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, et Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+}$.

r est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}}$$

2°) a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On sait que Arccos est définie sur $[-1, 1]$ donc :

$$\begin{aligned}
g(x) \text{ existe} &\iff -1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \\
&\iff \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \leq 1 \\
&\iff (1-x)^2 \leq (1+x)^2 \qquad \text{car } (1+x)^2 > 0 \\
&\iff 1 - 2x + x^2 \leq 1 + 2x + x^2 \\
&\iff x \geq 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de la fonction } g \text{ est } \mathbb{R}_+}$.

On sait que Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. La fonction $u : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable partout où elle est définie ; nous avons vu qu'elle est à valeurs dans $[-1, 1]$ sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 \iff 1 - x = 1 + x \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

$$\frac{1-x}{1+x} = -1 \iff 1 - x = -1 - x \iff 1 = -1 \text{ impossible}$$

Donc la fonction u est à valeurs dans $]-1, 1[$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition et quotient de fonctions dérivables, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(-1)(1+x) - 1.(1-x)}{(1+x)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}} \\
&= \frac{-1 - x - 1 + x}{(1+x)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \\
&= \frac{2}{(1+x)^2} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1 + 2x + x^2 - 1 - x^2 + 2x}{(1+x)^2}}} \\
&= \frac{2}{(1+x)^2} \frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{4x}} = \frac{2}{(1+x)^2} \frac{|1+x|}{\sqrt{4x}} = \frac{2}{(1+x)^2} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \qquad \text{car } 1 + x > 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}$$

3°) On constate que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = g'(x)$, donc $(f - g)'(x) = 0$.

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, on en tire que la fonction $f-g$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe une constante C telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)-g(x)=C$.
En particulier, $f(1)-g(1)=C$ d'où $C = 2\operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arccos}(0) = 2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0$.
Par ailleurs, $f(0)-g(0) = 2\operatorname{Arctan}(0) - \operatorname{Arccos}(1) = 2.0 - 0 = 0$.
Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)-g(x)=0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}$$

4°) Nous avons vu que $-1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1$, et même $-1 < \frac{1-x}{1+x} \leq 1$ car $-1 = \frac{1-x}{1+x}$ était impossible.
Donc, par stricte décroissance de Arccos, $\operatorname{Arccos}(-1) > \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \geq \operatorname{Arccos}(1)$, i.e. $\boxed{\pi > \theta \geq 0}$.

5°) On a $\cos(\theta) = \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) = \frac{1-x}{1+x}$ d'où :

$$\begin{aligned}(1+x)\cos(\theta) &= 1-x\\ x\cos(\theta)+x &= 1-\cos(\theta)\\ (\cos(\theta)+1)x &= 1-\cos(\theta)\end{aligned}$$

Comme $\theta \in [0,\pi[$, on sait que $\cos(\theta)+1 \neq 0$, ce qui nous permet d'écrire : $\boxed{x = \frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$.
Or $\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $1-\cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
On a également : $\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$, donc $1+\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi,

$$x = \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 = \boxed{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

6°) On en tire que $\sqrt{x} = \sqrt{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.
Or $\theta \in [0,\pi[$, donc $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui permet d'affirmer que $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$.
Finalement, $\sqrt{x} = \tan\frac{\theta}{2}$, donc $\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$, puisque $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On obtient bien $\boxed{2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$.

Exercice 3

Soit $z \in \mathbb{C}$. 0 n'est pas solution, on peut donc supposer que $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\iff (z-1)^n = z^n\\ &\iff \left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 \qquad \text{car } z \neq 0\\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\quad \frac{z-1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\quad z-1 = ze^{i\frac{2k\pi}{n}}\\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\quad z(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = 1\end{aligned}$$

Pour $k=0$, l'équation donne $0=1$, donc le cas $k=0$ est exclu.
Pour $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $\frac{2k\pi}{n}\in\,]0,2\pi[$ donc $1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\neq 0$. On a donc :

$$z \text{ solution de } (E) \iff \exists\, k\in\{1,\dots,n-1\},\quad z=\frac{1}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

Or, pour tout $k\in\{1,\dots,n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} &= \frac{1}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}\\
&= \frac{1}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}\\
&= i\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\\
&= \frac{1}{2}+i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble solution est : $\boxed{\left\{\frac{1}{2}\left(1+i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)/k\in\{1,\dots,n-1\}\right\}}$.

On constate que la partie réelle des solutions est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Remarque : attention à ne pas écrire $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$: c'est faux, car il arrive que le membre de gauche soit défini mais pas le membre de droite !

Par exemple, si $n=4$ et $k=2$, alors $\frac{k\pi}{n}=\frac{\pi}{2}$; $\tan(\frac{k\pi}{n})$ n'existe pas, alors que $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=0$!

<u>Exercice 4</u>

1°)

$$\begin{aligned}
Z+\frac{1}{Z}\in\mathbb{R} &\iff \overline{Z+\frac{1}{Z}}=Z+\frac{1}{Z}\\
&\iff \overline{Z}+\frac{1}{\overline{Z}}=Z+\frac{1}{Z}\\
&\iff \overline{Z}-Z=\frac{1}{Z}-\frac{1}{\overline{Z}}\\
&\iff \overline{Z}-Z=\frac{\overline{Z}-Z}{Z\overline{Z}}\\
&\iff (\overline{Z}-Z)Z\overline{Z}=(\overline{Z}-Z)\\
&\iff (\overline{Z}-Z)(Z\overline{Z}-1)=0\\
&\iff Z=\overline{Z} \text{ ou } |Z|^2=1
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z+\frac{1}{Z}\in\mathbb{R} \iff Z\in\mathbb{R} \text{ ou } |Z|=1}$$

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3°) z_1 et z_2 sont les racines de $(E) : z^2 - 2az + b = 0$.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 2az + b = 0 &\iff \forall z \in \mathbb{C}, (z - z_1)(z - z_2) = 0 \\ &\iff \forall z \in \mathbb{C}, z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_1 z_2 = b \end{cases}$. D'où $\dfrac{a^2}{b} = \boxed{\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{4z_1 z_2}}$.

4°) a)

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= r(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) \\ &= re^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = 2r \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}$$

b) $z_1 + z_2 = 2r \cos\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ et $z_1 z_2 = r^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Or, par la question 3, $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{(z_1 + z_2)^2}{4z_1 z_2}$ donc $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{4r^2 \cos^2\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{4r^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$.

Ainsi, $\boxed{\dfrac{a^2}{b} = \cos^2\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)}$.

On en déduit en particulier que $\boxed{\dfrac{a^2}{b} \in \mathbb{R}}$. De plus, $0 \leq \dfrac{a^2}{b} \leq 1$. Comme $a \neq 0$, finalement :

$\boxed{\dfrac{a^2}{b} \in]0, 1]}$.

5°) a) Calculons : $Z + \dfrac{1}{Z} = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \dfrac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} = \dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} - 2$.

Donc, $\boxed{Z + \dfrac{1}{Z} = 4\dfrac{a^2}{b} - 2}$.

Comme $\dfrac{a^2}{b}$ est un réel, on en déduit en particulier que $Z + \dfrac{1}{Z}$ est un réel donc, par 1, il vient : $\boxed{Z \in \mathbb{R} \text{ ou } |Z| = 1}$.

b) Si $|Z| = 1$ alors on a bien : $\boxed{|z_1| = |z_2|}$.

c) Supposons $Z \in \mathbb{R}$. Alors $Z + \dfrac{1}{Z}$ peut donc s'écrire $f(Z)$.

Or, par 5a, $f(Z) = Z + \dfrac{1}{Z} = 4\dfrac{a^2}{b} - 2$ et $\dfrac{a^2}{b} \in]0, 1]$, donc $f(Z) \in]-2, 2]$.
Par les variations de f dans la question 2, on en déduit que la seule possibilité est $f(Z) = 2$ et $Z = 1$. On obtient donc $\boxed{z_1 = z_2}$.
Remarque : On en déduit que $|z_1| = |z_2|$.

6°) On a démontré que $\boxed{|z_1| = |z_2| \iff \dfrac{a^2}{b} \text{ est un réel de }]0, 1]}$.