Devoir surveillé 2.

Jeudi 10 novembre 2022, de 7h45 à 11h45.

Les calculatrices sont interdites

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite de Fibonacci par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Premières propriétés

1°) Calculer F_n pour $n \in \{2, \dots, 6\}$.

2°) **a)** Démontrer que : $\forall n \geq 2,\ F_n \geq n - 1$.

b) En déduire la limite de la suite (F_n).

3°) On démontre dans cette question quelques propriétés algébriques de la suite (F_n).
Les 3 questions suivantes sont indépendantes entre elles.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

b) Montrer l'identité de Cassini : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.

c) Sans faire de récurrence, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

Une somme d'Arctan

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)$ et $B_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)$.

a) Montrer que A_n et B_n sont bien définis et appartiennent à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Simplifier $\tan(B_n)$ en utilisant l'identité de Cassini.

c) En déduire que $A_n = B_n$.

d) Quelles égalités obtient-on pour les deux premières valeurs de n ?

5°) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2k+1}}\right)$.

6°) Déterminer la limite de la suite (S_n).

Une expression de F_n et une deuxième somme

7°) Démontrer qu'il y a un unique réel strictement positif φ que l'on déterminera tel que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Vérifiez que $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$.

8°) Montrer, sans utiliser la valeur exacte de φ, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^n}\right)$.

On <u>fixe</u> un réel x de $\left[0, \dfrac{1}{\varphi}\right[$ pour toute la fin de l'exercice.

9°) Montrer que la suite $(F_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Indication : on rappelle que si q est un réel de $]-1,1[$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k x^k$.

a) Montrer, sans récurrence mais avec des changements d'indices, que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$(1 - x - x^2)T_n(x) = x - F_{n+1}x^{n+1} - F_n x^{n+2}$$

b) En déduire que la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la limite $\ell(x)$ en fonction de x.

<u>Exercice 2</u>

Le but de cet exercice est de démontrer, par deux méthodes indépendantes, que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$$

Méthode par dérivation

1°) Justifier que le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ est $\mathbb{R}_+$, et que f est dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+^*$.
Déterminer l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) **a)** Justifier que le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est $\mathbb{R}_+$, et que g est dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer l'expression de la dérivée de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

3°) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Méthode trigonométrique

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

4°) Justifier que $\theta \in [0, \pi[$.

5°) Exprimer x en fonction de $\cos(\theta)$, puis établir que $x = \tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

6°) En déduire que $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Résoudre l'équation (E) suivante :

$$(E) : (z-1)^n - z^n = 0.$$

On écrira les solutions sous forme algébrique. Que remarque-t-on sur la partie réelle des solutions ?

Exercice 4

a et b désignent deux complexes non nuls et (E) désigne l'équation :

$$z^2 - 2az + b = 0$$

On note z_1 et z_2 les racines complexes (éventuellement confondues) de (E).
On remarque que, puisque $b \neq 0$, z_1 et z_2 ne sont pas nuls.

Partie 1 : Résultats préliminaires

1°) Soit Z un complexe non nul. Montrer que :

$$Z + \frac{1}{Z} \text{ est un réel} \iff Z \in \mathbb{R} \text{ ou } |Z| = 1$$

2°) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array}$. Dresser le tableau de variations de f.

3°) Montrer que : $\dfrac{a^2}{b} = \dfrac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2}$.

Partie 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$

4°) On suppose $|z_1| = |z_2|$.
Ainsi, z_1 et z_2 peuvent s'écrire : $z_1 = re^{i\theta_1}$ et $z_2 = re^{i\theta_2}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et θ_1, θ_2 sont des réels.

a) Factoriser $z_1 + z_2$.

b) Exprimer alors $\dfrac{a^2}{b}$ à l'aide de θ_1 et θ_2 et de la fonction cos.
En déduire que $\dfrac{a^2}{b}$ est un réel et $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$.

5°) Réciproquement, on suppose $\dfrac{a^2}{b}$ est un réel tel que $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$. On pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

a) Montrer que $Z + \dfrac{1}{Z} = 4\dfrac{a^2}{b} - 1$.
En déduire que $Z \in \mathbb{R}$ ou $|Z| = 1$.

b) Conclure dans le cas où $|Z| = 1$.

c) On suppose que $Z \in \mathbb{R}$.
Démontrer, à l'aide des questions 5a et 2, que $z_1 = z_2$.

6°) Qu'a-ton démontré finalement dans la partie 2 ?