Correction du devoir surveillé 1.

Exercice 1

1°) Notons $(E)\ :\ 2\sin^2(x)+\sin^2(2x)=2$. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 2\sin^2(x)-1+\sin^2(2x)=1\\
&\iff -\cos(2x)+\big(1-\cos^2(2x)\big)=1\\
&\iff \cos(2x)+\cos^2(2x)=0\\
&\iff \cos(2x)\left(1+\cos(2x)\right)=0\\
&\iff \cos(2x)=0 \ \text{ ou } \ 1+\cos(2x)=0\\
&\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ \text{ ou } \ \cos(2x)=-1\\
&\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ \exists\, k\in\mathbb{Z},\ 2x=\pi+2k\pi\\
&\iff \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$

2°) On sait que $1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2.\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$. Notons $t=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on a donc :

$$1=\frac{2t}{1-t^2}\ \text{ d'où } \ 1-t^2=2t \ \text{ d'où } \ t^2+2t-1=0$$

Le trinôme du second degré X^2+2X-1 a pour discriminant $\Delta=4+4=8=(2\sqrt{2})^2$, ses racines sont donc

$$\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2} \text{ et } \frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$$

Or t est racine de ce trinôme, et c'est un réel positif puisque $\frac{\pi}{8}\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et tan est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}[$. Donc nécessairement $\boxed{t=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=-1+\sqrt{2}}$.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2=1+2+1-2\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}.$$

Comme cos est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{1}{4-2\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})}} \\
&= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{16-8}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Enfin :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Comme sin est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

3°) L'équation $(E)\ :\ \sin(x) - \sin(7x) = \cos(4x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \sin(4x-3x) - \sin(4x+3x) = \cos(4x) \\
&\iff \sin(4x)\cos(3x) - \cos(4x)\sin(3x) - (\sin(4x)\cos(3x) + \cos(4x)\sin(3x)) = \cos(4x) \\
&\iff -2\cos(4x)\sin(3x) - \cos(4x) = 0 \\
&\iff \cos(4x)\left(2\sin(3x)+1\right) = 0 \\
&\iff \cos(4x) = 0 \ \text{ ou } \ 2\sin(3x)+1 = 0 \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ ou } \ \sin(3x) = -\frac{1}{2} \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \ \text{ ou } \ 3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 3x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = \frac{7\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^x - 4 + 3 \times 2^{-x} > 0 &\iff 2^x - 4 + \frac{3}{2^x} > 0 \\
&\iff \frac{(2^x)^2 - 4 \times 2^x + 3}{2^x} > 0 \\
&\iff (2^x)^2 - 4 \times 2^x + 3 > 0 \qquad \text{car } 2^x > 0 \\
&\iff X^2 - 4X + 3 > 0 \qquad \text{en posant } X = 2^x
\end{aligned}$$

Le trinôme du second degré $X^2 - 4X + 3$ admet pour racines 1 et 3.

De plus, le coefficient de X^2 est $1 > 0$ donc

$$\begin{aligned}
2^x - 4 + 3 \times 2^{-x} < 0 &\iff X < 1 \text{ ou } X > 3 \\
&\iff 2^x < 1 \text{ ou } 2^x > 3 \\
&\iff \ln(2^x) < \ln 1 \text{ ou } \ln(2^x) > \ln 3 \\
&\qquad \text{car ln est strictement croissante et 1 et 3 sont dans } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff x \ln 2 < 0 \text{ ou } x \ln 2 > \ln 3 \\
&\iff x < 0 \text{ ou } x > \frac{\ln 3}{\ln 2} \qquad \text{car } \ln 2 > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est : }]-\infty, 0[\cup \left]\frac{\ln 3}{\ln 2}, +\infty\right[.}$

Exercice 3

1°) • Pour tout $x > 0$, $f_n(x) = x \ln(x) + (n-1)x$, donc $f_n(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = f_n(0)$.

Ainsi $\boxed{f_n \text{ est continue en } 0}$.

• Pour tout $x > 0$, $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \ln(x) + n - 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.

On en tire que $\boxed{f_n \text{ n'est pas dérivable en } 0}$, et que la courbe $\mathcal{C}_n$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

2°) Par produit et somme de fonctions dérivables, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$,

$$f_n'(x) = \ln(x) + n - 1 + x\frac{1}{x} = \ln(x) + n$$

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) > 0 &\iff \ln(x) > -n \\
&\iff x > e^{-n} \text{ car exp est strictement croissante}
\end{aligned}$$

$$\text{De même, } f_n'(x) = 0 \iff x = e^{-n}$$

Comme f_n est continue en 0, le signe de f_n' sur $\mathbb{R}_+^*$ nous permet d'obtenir les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		e^{-n}		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
f_n	0		$-e^{-n}$		$+\infty$

Avec $f_n(e^{-n}) = e^{-n}\left(n - 1 + \ln(e^{-n})\right) = e^{-n}\left(n - 1 - n\ln(e)\right) = -e^{-n}$.

c.f. page 6 pour la courbe $\mathcal{C}_1$.

3°) On a $f_n(0) = f_{n'}(0)$.

Pour $x > 0$, comme $n < n'$, on a :

$$\begin{aligned}
n - 1 + \ln(x) &< n' - 1 + \ln(x) \\
x\left(n - 1 + \ln(x)\right) &< x\left(n' - 1 + \ln(x)\right) \text{ car } x > 0 \\
\text{i.e.} \quad f_n(x) &< f_{n'}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi la courbe $\boxed{\mathcal{C}_n \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_{n'}}$; plus précisément, les deux courbes coïncident au point d'abscisse 0 et $\mathcal{C}_n$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_{n'}$ partout ailleurs.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons vu que f_n est non dérivable en 0 et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que f_n' ne s'annulait qu'en e^{-n}. Donc le point A_n est le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse e^{-n}. Son ordonnée est : $f_n(e^{-n}) = -e^{-n}$ (c.f. calcul à la question 2).
Ainsi les coordonnées (x, y) de A_n vérifient $y = -x$.
Autrement dit, $\boxed{\text{tous les points } A_n \text{ sont sur la droite d'équation } y = -x}$.

5°) On résout, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_n(x) = 0 &\iff x\,(n - 1 + \ln(x)) = 0 \\ &\iff n - 1 + \ln(x) = 0 \text{ car } x \text{ est non nul} \\ &\iff \ln(x) = -n + 1 \\ &\iff x = e^{-n+1} \text{ car exp est bijective} \end{aligned}$$

On en déduit que, en dehors de l'origine, $\mathcal{C}_n$ coupe l'axe des abscisses en un unique point B_n qui est celui d'abscisse e^{-n+1}. La pente de $\mathcal{C}_n$ au point B_n est donnée par :

$$f_n'(e^{-n+1}) = n + \ln\left(e^{-n+1}\right) = n - n + 1 = 1$$

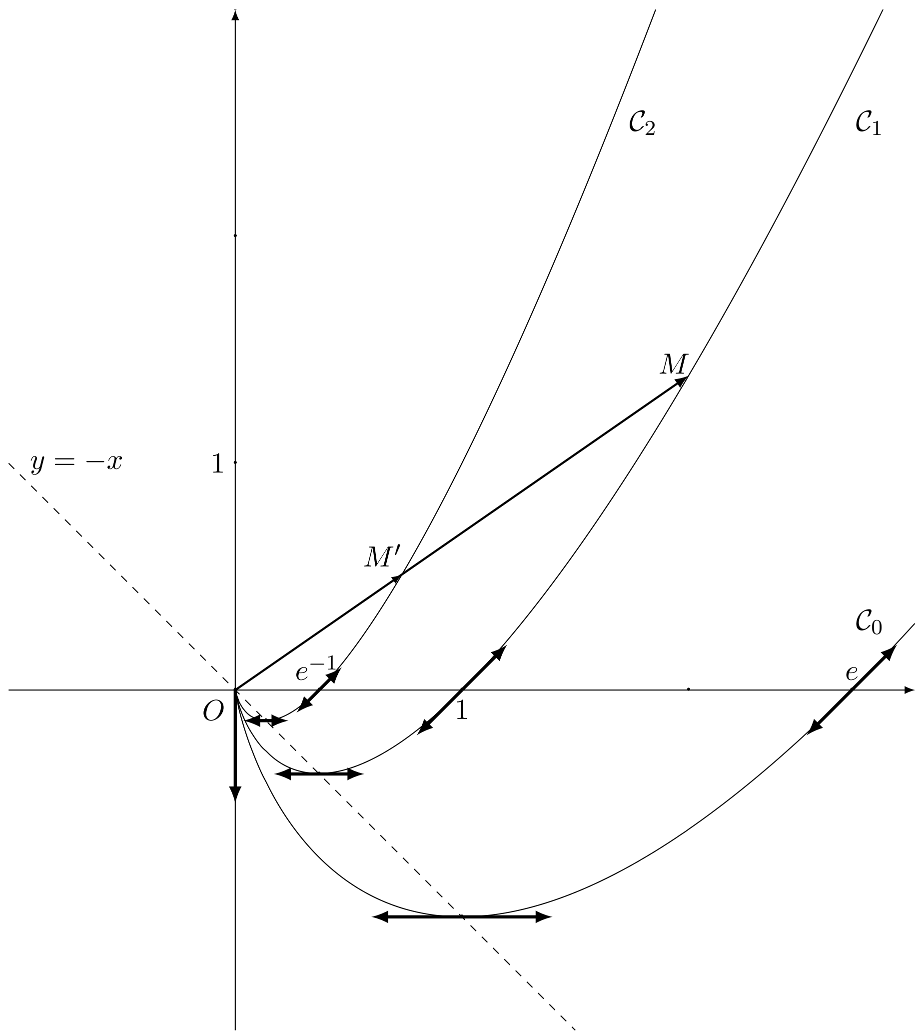
Cette valeur ne dépend pas de n, ce qui signifie que $\boxed{\text{la tangente à } \mathcal{C}_n \text{ en } B_n \text{ garde une direction fixe}}$, elle est toujours de pente 1.

6°) Calculons :

$$\begin{aligned} f_{n+1}\left(\frac{x}{e}\right) &= \frac{x}{e}\left[(n+1) - 1 + \ln\left(\frac{x}{e}\right)\right] \\ &= \frac{x}{e}\,(n + \ln(x) - \ln(e)) \\ &= \frac{1}{e}x\,(n - 1 + \ln(x)) \\ f_{n+1}\left(\frac{x}{e}\right) &= \frac{1}{e}f_n(x). \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(x, f_n(x))$, et le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{x}{e}, f_{n+1}\left(\frac{x}{e}\right)\right) = \left(\frac{x}{e}, \frac{1}{e}f_n(x)\right) = \frac{1}{e}\,(x, f_n(x))$. Ainsi $\boxed{\overrightarrow{OM'} = e^{-1}\overrightarrow{OM}}$.
On dit que $\mathcal{C}_{n+1}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_n$ par homothétie de centre O et de rapport e^{-1}, en quelque sorte c'est la même courbe mais "contractée" d'un facteur e^{-1}.

7°) Tracé simultané de $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:
On n'oublie pas de tracer les tangentes aux points particuliers : verticale en 0, horizontale en e^{-n}, de pente 1 en e^{-n+1}.



Exercice 4

1°) a) Évaluons l'égalité dans $(*)$ liant $f'(x)$ et $f(x)$ pour tout réel x, en 0 :

$$\left(f'(0)\right)^2 - \left(f(0)\right)^2 = 1$$

Or, d'après $(*)$ également, $\left(f'(0)\right)^2 = 1^2 = 1$, d'où $-\left(f(0)\right)^2 = 0$ et donc $\boxed{f(0) = 0}$.

b) D'après $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(f'(x)\right)^2 = \left(f(x)\right)^2 + 1 \geq 1$ (car f est à valeurs réelles, et un carré de réel est toujours positif). En particulier, $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(f'(x)\right)^2 > 0$, donc $f'(x) \neq 0$.
Ainsi $\boxed{f' \text{ ne s'annule jamais}}$.

c) Comme f est deux fois dérivable, par somme et produit de fonctions dérivables, la fonction $g : x \mapsto \left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2$ est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x).$$

Or d'après $(*)$, g est constante donc sa dérivée est nulle. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, 2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0$$
$$2f'(x)\left(f''(x) - f(x)\right) = 0$$

Et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x)$ est non nul, on obtient bien :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = 0 \text{ i.e. } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)}.$$

d) Comme f est deux fois dérivable, par somme de fonctions dérivables, u et v sont dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u'(x) = f''(x) + f'(x) &\text{ et } v'(x) = f''(x) - f'(x) \\ u'(x) = f(x) + f'(x) &\text{ et } v'(x) = f(x) - f'(x) \text{ d'après la question précédente} \\ u'(x) = u(x) &\text{ et } v'(x) = -v(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{u' = u \text{ et } v' = -v}$.

Comme $u' = u$, on sait qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{u : x \mapsto \lambda e^x}$; comme $v' = -v$, on sait qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{v : x \mapsto \mu e^{-x}}$.

e) Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) - v(x) = 2f(x)$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(u(x) - v(x)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\lambda e^x - \mu e^{-x}\right)$.

Or $f(0) = 0$ donc $\dfrac{1}{2}(\lambda - \mu) = 0$, i.e. $\lambda = \mu$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\lambda}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\lambda}{2}\left(e^x - \left(-e^{-x}\right)\right) = \frac{\lambda}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

Or $f'(0) = 1$, donc $\dfrac{\lambda}{2}(1+1) = 1$, d'où $\lambda = 1$.

Ainsi, $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)}$.

2°)

- D'après la question 1, si $f \in \mathcal{E}$ alors $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.
- Réciproquement, posons $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ et montrons que $f \in \mathcal{E}$.

  f est alors bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$.

  Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((e^x)^2 + \left(e^{-x}\right)^2 + 2e^x e^{-x}\right) - \frac{1}{4}\left((e^x)^2 + \left(e^{-x}\right)^2 - 2e^x e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 - (-2)\right) = 1 \end{aligned}$$

  Ainsi f est bien solution de $(*)$.
- Conclusion : $\boxed{\mathcal{E} = \left\{x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\right\}}$.

Exercice 5

1°) a) Le trinôme du second degré $x^2 - 4x - 12$ a pour discriminant $\Delta = 4^2 + 4 \times 12 = 64 = 8^2$.

Il y a 2 racines réelles : $\dfrac{4+8}{2} = 6$ et $\dfrac{4-8}{2} = -2$.

Comme le coefficient de x^2 est $1 > 0$, on obtient : $x^2 - 4x - 12 \leq 0 \iff x \in [-2, 6]$.

Finalement : $\boxed{\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} \text{ si } x \in [-2, 6] \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 12} \text{ si } x < -2 \text{ ou } x > 6 \end{cases}}$

b) Notons $x_1 = -2$ et $x_2 = 6$.
$x \mapsto -x^2 + 4x + 12$ est dérivable sur $]-2, 6[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; et $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est dérivable sur $]-2, 6[$.
$x \mapsto x^2 - 4x - 12$ est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]6, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; et $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]6, +\infty[$.
Ainsi, f est dérivable sur D, et pour tout $x \in D$,
si $x \in]-2, 6[$, $f'(x) = \dfrac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x + 12}} = \boxed{\dfrac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}}}$;
si $x < -2$ ou $x > 6$, $f'(x) = \dfrac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x - 12}} = \boxed{\dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}}}$.

c) Étudions le taux d'accroissement en x_1 i.e. en -2. On a $f(-2) = 0$.
Pour $x \in]-2, 6[$, $f(x) = \sqrt{-(x+2)(x-6)} = \sqrt{x+2}\sqrt{6-x}$ car $x + 2 > 0$ et $x - 6 < 0$, donc :

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{6-x}}{x+2} = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+2}} \underset{x \to -2^+}{\longrightarrow} +\infty$$

Pour $x \in]-\infty, -2[$, $f(x) = \sqrt{(x+2)(x-6)} = \sqrt{(-x-2)(6-x)} = \sqrt{-x-2}\sqrt{6-x}$ car $x + 2 < 0$ et $x - 6 < 0$, donc :

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = -\frac{\sqrt{-x-2}\sqrt{6-x}}{-x-2} = -\frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{-x-2}} \underset{x \to -2^-}{\longrightarrow} -\infty$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } x_1}$, et il y a une $\boxed{\text{tangente verticale au point d'abscisse } x_1}$.

2°) Soit $x \in D$: par 1b, $f'(x)$ est du signe de $-x + 2$ si $x \in]-2, 6[$ et du signe de $x - 2$ sinon.

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) On peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|(x+2)(x-6)|}$. Calculons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(4-x) = \sqrt{|(4-x+2)(4-x-6)|} = \sqrt{|(6-x)(-x-2)|} = \sqrt{|(x-6)(x+2)|} = f(x)$$

On en déduit que $\boxed{\mathcal{C} \text{ admet la droite d'équation } x = 2 \text{ comme axe de symétrie.}}$

4°) **a)** Pour tout $x \geq 6$,

$$\begin{aligned} f(x) - (x-2) &= \sqrt{x^2 - 4x - 12} - (x-2) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 4x - 12} - (x-2))(\sqrt{x^2 - 4x - 12} + (x-2))}{\sqrt{x^2 - 4x - 12} + x - 2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 12 - (x-2)^2}{\sqrt{x^2 - 4x - 12} + x - 2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 12 - (x^2 - 4x + 4)}{\sqrt{x^2 - 4x - 12} + x - 2} \\ &= -\frac{16}{\sqrt{x^2 - 4x - 12} + x - 2} \end{aligned}$$

Par somme, composition, quotient de limites, $f(x)-(x-2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la droite } \mathcal{D} \text{ d'équation } y=x-2 \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ en } +\infty.}$

De plus, pour $x \geq 6$, $f(x)-(x-2)<0$.

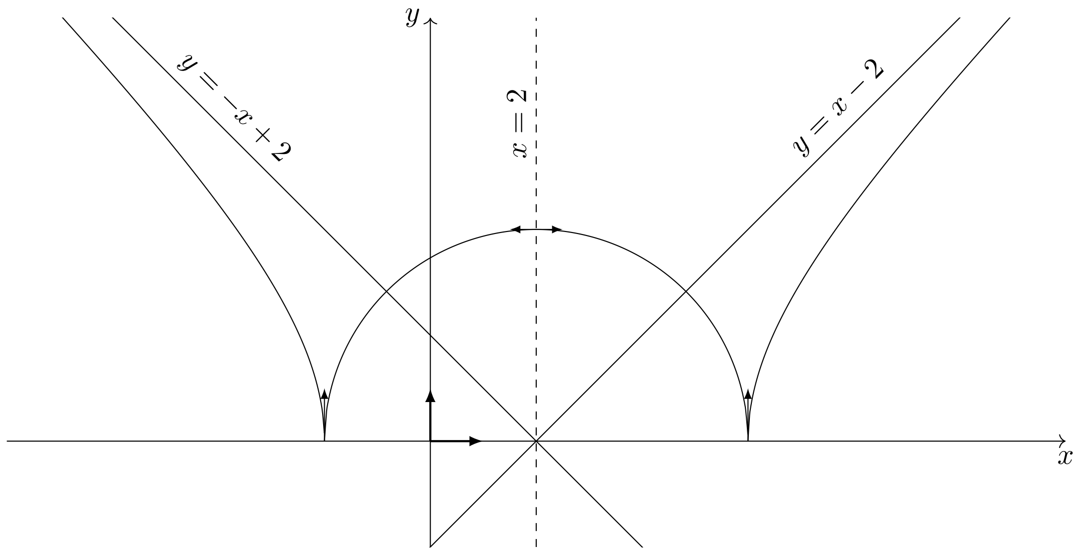
Ainsi, $\boxed{\text{sur } [x_2,+\infty[,\ \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } \mathcal{D}}$.

b) On en déduit que la droite $\mathcal{D}'$ symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à la droite d'équation $x=2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

$\mathcal{D}$ passe par le point $A(2,0)$ et a pour pente 1 donc $\mathcal{D}'$ passe aussi par A et a pour pente -1. C'est la droite d'équation $y=-x+2$.

$\boxed{\text{la droite } \mathcal{D}' \text{ d'équation } y=-x+2 \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C} \text{ en } -\infty.}$

5°) Allure de la courbe en tenant compte des questions précédentes :



6°) a) Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M\in\Gamma &\iff \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2=16 \\ &\iff (x-2)^2+y^2=16 \\ &\iff x^2-4x+4+y^2=16 \\ &\iff x^2-4x+y^2-12=0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma \text{ a pour équation : } x^2-4x+y^2-12=0}$.

b) Soit $M(x,y)$ un point du plan.

On peut supposer $x\in[-2,6]$ car si $M\in\Gamma$ alors $x\in[2-4,2+4]$ i.e. $x\in[-2,6]$.

$$\begin{aligned} M\in\Gamma' &\iff \begin{cases} y\geq 0 \\ x^2-4x+y^2-12=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=-x^2+4x+12 \end{cases} \\ &\iff y=\sqrt{-x^2+4x+12} \\ &\qquad\qquad \text{on a bien : } -x^2+4x+12\geq 0 \text{ puisque } x\in[-2,6] \\ &\iff y=f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Gamma'=\mathcal{C}'}$.