Correction du devoir surveillé 8.

Exercice 1

1°) a) X prend des valeurs entières, $Y = (-1)^X$ ne peut donc prendre que les valeurs 1 et -1, et donc les valeurs possibles sont $\dfrac{1+1}{2} = 1$ et $\dfrac{-1+1}{2} = 0$.

Ainsi, Z suit une loi de Bernoulli.

De plus, Z vaut 1 si et seulement si Y vaut 1, ce qui arrive si et seulement si X prend une valeur paire, ce qui est justement l'événement A. Ainsi $P(Z = 1) = P(A)$ et donc $\boxed{Z \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } P(A)}$.

b) Donc $E(Z) = P(A)$.

Or, on a aussi, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = \dfrac{E(Y)+1}{2}$. On en tire que $\boxed{E(Y) = 2P(A) - 1}$.

2°) a) X compte le nombre de "succès" lors de la répétition de n expériences aléatoires identiques indépendantes (les n lancers de pièce), où l'on considère que le "succès" est "obtenir pile", ce qui arrive avec probabilité p.

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p}$.

b) Puisque $Y = (-1)^X$, on peut écrire, par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (-p + 1 - p)^n \qquad \text{par la formule du binôme}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = (1-2p)^n}$$

3°) a) On a donc $2P(A) - 1 = (1-2p)^n$ d'où $\boxed{P(A) = \dfrac{1 + (1-2p)^n}{2}}$.

b) On résout :

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1 + (1-2p)^n}{2} \geq \frac{1}{2} \iff 1 + (1-2p)^n \geq 1 \iff (1-2p)^n \geq 0$$

Si n est pair, on a bien $(1-2p)^n \geq 0$.

Si n est impair, $(1-2p)^n \geq 0 \iff 1 - 2p \geq 0 \iff p \leq \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P(A) \geq \frac{1}{2} \iff p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ pair .}}$$

4°) On a $\boxed{G = 10XY}$, puisque sa valeur doit être celle de $10X$ lorsque X est pair i.e. lorsque Y vaut 1, et sa valeur doit être celle de $-10X$ lorsque X est impair i.e. lorsque Y vaut -1. Autrement dit, on a $G = 10X(-1)^X$, donc, par le théorème de transfert :

$$E(G) = \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X = k)$$

$$\boxed{E(G) = 10\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k P(X = k)} \quad \text{car le terme pour } k = 0 \text{ est nul}$$

5°) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}$, donc $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$.

6°) On a donc

$$\begin{aligned}
E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{n-k} \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= 10n(-p)\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(-p)^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\
&= -10np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= -10np(-p+1-p)^{n-1} \quad \text{par la formule du binôme}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}}$$

7°) Comme $n > 0$ et $p > 0$, $E(G) < 0 \iff (1-2p)^{n-1} > 0$.
Si $p < \dfrac{1}{2}$, on a vu que $P(A) \geq \dfrac{1}{2}$ à la question 3, et comme alors $1 - 2p > 0$, on a bien $E(G) < 0$.
Si $p = \dfrac{1}{2}$, on a $E(G) = 0$.
Si $p > \dfrac{1}{2}$, alors pour avoir $P(A) \geq \dfrac{1}{2}$, il faut n pair d'après la question 3. Mais comme dans ce cas, $1 - 2p < 0$ et $n - 1$ impair, on a $(1-2p)^{n-1} < 0$ et donc $E(G) > 0$.
Finalement, on a bien :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) < 0 \end{array}\right. \iff p < \frac{1}{2}.}$$

8°) Soit $i \in \{1, \ldots, 200\}$. X_i suit la loi $\mathcal{B}(2, \frac{1}{4})$ donc $P(X_i = 0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$,
$P(X_i = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{6}{16}$, $P(X_i = 2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \dfrac{1}{16}$.
Comme $G_i = 10X_i(-1)^{X_i}$, $\boxed{G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}}$ et

$$\boxed{P(G_i = 0) = P(X_i = 0) = \frac{9}{16},\ P(G_i = -10) = P(X_i = 1) = \frac{6}{16},\ P(G_i = 20) = P(X_i = 2) = \frac{1}{16}}.$$

D'après la question 6, $E(G_i) = -10.2.\dfrac{1}{4}\left(1 - 2\dfrac{1}{4}\right)^1$ donc $\boxed{E(G_i) = -\dfrac{5}{2}}$.

$E(G_i^2) = 0.P(G_i = 0) + 100P(G_i = -10) + 400P(G_i = 20) = \dfrac{100.6 + 400}{16} = \dfrac{1000}{16} = \dfrac{125}{2}$.

D'où $V(G_i) = E(G_i^2) - (E(G_i))^2 = \dfrac{125}{2} - \dfrac{25}{4}$ donc $\boxed{V(G_i) = \dfrac{225}{4}}$.

9°) $\boxed{J = \sum_{i=1}^{200} (-G_i)}$.

Par linéarité de l'espérance, on a donc $E(J) = \sum_{i=1}^{200} -E(G_i) = \sum_{i=1}^{200} \dfrac{5}{2}$ donc $\boxed{E(J) = 500}$.

Comme les variables G_i sont indépendantes (et donc les $-G_i$ aussi),

$V(J) = \sum_{i=1}^{200} V(-G_i) = \sum_{i=1}^{200} (-1)^2 V(G_i) = \sum_{i=1}^{200} \dfrac{225}{4} = 50 \times 225$ donc $\boxed{V(J) = 11250}$.

10°) $|J - 500| \geq 400 \iff J - 500 \geq 400$ ou $J - 500 \leq -400 \iff J \geq 900$ ou $J \leq 100$.

Donc $J \leq 100 \Longrightarrow |J - 500| \geq 400$.

Ainsi $(J \leq 100) \subset (|J - 500| \geq 400)$ et donc $\boxed{P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400).}$.

11°) Comme $500 = E(J)$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{50 \times 225}{4^2 \times 100^2} = \frac{5^2 \times 2 \times 5^2 \times 3^2}{2^4 \times 5^4 . 2^4} = \frac{9}{2^7}$$

Donc, d'après la question précédente, $\boxed{P(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}.}$

12°) Comme $\dfrac{9}{128} \leq \dfrac{9}{90} = 10\%$, la probabilité que le forain gagne moins de 100 euros lors de cette journée est bien inférieure à 10% : $\boxed{\text{oui, il peut installer son stand}}$, cela se conforme à ses exigences de rentabilité.

Exercice 2

1°) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions continues.

$\dfrac{\text{Arctan}(t)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$: f est continue en 0.

$\boxed{\text{Finalement, } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

2°) a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient, composée et somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + x) - \sqrt{x} \times 1}{(1 + x)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{(1 + x) - 2\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}(1 + x)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)} = \frac{1 - x - (1 + x)}{2\sqrt{x}(1 + x)^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{x}(1 + x)^2}$$
$$h'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{(1 + x)^2} < 0$$

Ainsi, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus h est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations donc $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\sqrt{x} - \dfrac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}}}$$

c) h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $x > 0$, $h(x) < h(0)$ i.e. $h(x) < 0$. Ainsi, $f'(x) < 0$.
Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

3°)
- f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On rappelle que $\operatorname{Arctan}(t) \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}(1-x+o(x)) - \left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} + o(x\sqrt{x})\right)\right) \quad \text{car } \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(x\sqrt{x}\left(-1+\frac{1}{3}\right) + o(x\sqrt{x})\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3} + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{3}$.

Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{3}$. Ainsi,

- f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{3}$.
- L'information $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{3}$ se réécrit $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$, donc f' est continue en 0.

Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

4°) a) En utilisant cette fois le $DL_5(0)$ de Arctan : $\operatorname{Arctan}(t) \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} + o(t^5)$,

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5} + o(x^2\sqrt{x})\right)$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2)}$$

b) On note $\mathcal{D}$ la demi-droite d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{3}$ avec $x \geq 0$.
Comme $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{3} + o(x)$, $\boxed{\mathcal{D} \text{ est une demi-tangente à la courbe } \mathcal{C} \text{ de } f \text{ en l'origine}}$.
De plus, $f(x) - \left(1 - \dfrac{x}{3}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{5} + o(x^2)$ donc $f(x) - \left(1 - \dfrac{x}{3}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{5}$.
Ainsi, au voisinage de 0 (à droite), $f(x) - \left(1 - \dfrac{x}{3}\right) \geq 0$.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ est localement au-dessus de } \mathcal{D}}$.

5°) Soit $n \geq 2$. $\forall x > 0$, $(E_n) \iff f(x) = \dfrac{1}{n}$.

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(0)[$.

$\text{Arctan}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc, par composition et quotient, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $f(0) = 1$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0, 1[$.

$\dfrac{1}{n} \in]0, 1[$ donc $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent u_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\boxed{(E_n) \text{ admet une unique solution } u_n \text{ dans } \mathbb{R}_+^*}$.

6°) Soit $n \geq 2$. On a $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$, et $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.

Comme f est décroissante, on a $u_{n+1} > u_n$ (si on avait $u_{n+1} \leq u_n$, on aurait $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$).

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

7°) Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

Comme la suite (u_n) est positive, $\ell \geq 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc continue en ℓ, donc $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

Or $\forall n \geq 2$, $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ donc $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $f(\ell) = 0$.

Or f ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$ ($f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} > 0$) : contradiction.

Ainsi, (u_n) ne converge pas. Comme elle est croissante, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

8°) $\forall n \geq 2$, $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$. Comme $u_n > 0$, cela s'écrit : $\dfrac{\text{Arctan}(u_n)}{\sqrt{u_n}} = \dfrac{1}{n}$.

$\text{Arctan}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\text{Arctan}(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $\text{Arctan}(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

Par quotient, $\dfrac{\text{Arctan}(u_n)}{\sqrt{u_n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2\sqrt{u_n}}$. D'où $\dfrac{\pi}{2\sqrt{u_n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

En élevant au carré, $\dfrac{\pi^2}{4u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Donc, $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^2\pi^2}{4}}$.

9°) **a)** La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+}$ et est l'unique primitive de f qui s'annule en 1.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = f(x)}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = f(x) > 0$. Donc, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$.

10°) Soit $x \geq 1$. Soit $t \in [1, x]$, $f(t) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

Comme $t \geq 1$, on a $\sqrt{t} \geq 1$, et Arctan est croissante donc $\text{Arctan}(\sqrt{t}) \geq \text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc, comme $\sqrt{t} > 0$, $f(t) \geq \dfrac{\pi}{4\sqrt{t}}$.

Par croissance de l'intégrale (puisque $1 \leq x$) : $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq \dfrac{\pi}{2}\int_1^x \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}\left[\sqrt{t}\right]_1^x$.

Donc, $\boxed{g(x) \geq \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1)}$.

Comme $\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que : $\boxed{g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

11°) Soit $x > 0$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})$ et $v(t) = 2\sqrt{t}$; u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\dfrac{1}{1+t}$, $v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} g(x) &= \Big[2\sqrt{t}\operatorname{Arctan}(\sqrt{t})\Big]_1^x - \int_1^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{x}\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - 2\frac{\pi}{4} - [\ln(|1+t|)]_1^x \end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) = 2\sqrt{x}\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - \ln(1+x) + \ln(2) - \frac{\pi}{2}}$$

12°) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $(F_0) \iff y'(x) + \dfrac{1}{2x}y(x) = 0$.

(F_0) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène (sous forme normalisée.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Donc les solutions de (F_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$,

i.e. $\boxed{\text{les solutions de } (F_0) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x \mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$.

13°) a) Soit $x > 0$. On pose $u = \sqrt{t}$, $t \mapsto \sqrt{t}$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, et si $t = 1$, alors $u = 1$; si $t = x$, alors $u = \sqrt{x}$.

$$\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{1+t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{Arctan}(u)]_1^{\sqrt{x}}$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4}}$.

b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $(F) \iff y'(x) + \dfrac{1}{2x}y(x) = \dfrac{1}{2x(1+x)}$.

Posons $y : x \mapsto \lambda(x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit, inverse et composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0$, $y(x) = \lambda(x) \times x^{-\frac{1}{2}}$ donc, pour tout $x > 0$:

$$y'(x) = \lambda'(x)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\lambda(x)x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\lambda(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall x > 0,\ \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\lambda(x)}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x(1+x)} \\ &\iff \forall x > 0,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \end{aligned}$$

Or, par la question précédente, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ est $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

D'après ce qui précède, $\boxed{x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ i.e. la fonction } f \text{ est solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

14°) On en déduit que $\boxed{\text{les solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions } x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) + \lambda}{\sqrt{x}} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.}$

15°) • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par 13b, f est bien solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $f(0) = 1$ donc $2 \times 0 \times f'(0) + f(0) = 1 = \dfrac{1}{1+0}$. Ainsi, f est solution de (F) sur $\mathbb{R}_+$.

- Réciproquement, soit $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une solution de (F) sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et solution de l'équation (F) sur $\mathbb{R}_+$.
En particulier, y est solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par 14, il existe un réel λ tel que, pour tout $x > 0$, $y(x) = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{x}) + \lambda}{\sqrt{x}} = f(x) + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$.
Or y est continue en 0 donc y a une limite finie en 0.
On sait que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et que, si $\lambda > 0$, $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et , si $\lambda < 0$, $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
Ainsi, si $\lambda \neq 0$, $f(x) + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$ n'a pas de limite finie en 0.
On en déduit que la seule possibilité est $\lambda = 0$, i.e que pour tout $x > 0$, $y(x) = f(x)$.
De plus, y et f sont continues en 0 donc cette égalité est aussi vraie en 0.
- Finalement, $\boxed{f \text{ est l'unique solution de } (F) \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

Exercice 3

1°) a) Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
On a donc $u^{k-1}(y) = u^{k-1}(u(x)) = u^k(x) = 0$, puisque $u^k = 0$.
Donc $y \in \text{Ker}(u^{k-1})$.
Ainsi $\boxed{\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u^{k-1})}$.
Comme $2 = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$, on en tire que $2 \leq \dim\big(\text{Ker}(u^{k-1})\big)$.
Et comme $\text{Ker}(u^{k-1})$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 3, on peut bien affirmer que $\boxed{2 \leq \dim\big(\text{Ker}(u^{k-1})\big) \leq 3}$.

b) Puisque $u^3 = 0$, d'après la question précédente, $2 \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 3$.
Supposons par l'absurde que $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 3$. Alors, puisque $\text{Ker}(u^2)$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 3, on aurait $\text{Ker}(u^2) = E$ c'est-à-dire $u^2 = 0$.
En utilisant la question précécente avec $k = 2$, on aurait donc $2 \leq \dim(\text{Ker}(u)) \leq 3$.
Or, d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$ d'où $\dim(\text{Ker}(u)) = 3 - 2 = 1$: contradiction.
Donc $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2}$.

2°) Comme $\dim(\text{Ker}(u^2)) \neq 3 = \dim(E)$, on a $\text{Ker}(u^2) \neq E$ donc il existe au moins un vecteur a de E qui ne soit pas dans $\text{Ker}(u^2)$, c'est-à-dire tel que $\boxed{u^2(a) \neq 0}$.

3°) Soient λ, μ et γ des réels, supposons que $\lambda.a + \mu.u(a) + \gamma.u^2(a) = 0$: $(*)$.
Appliquons u^2 à $(*)$: $u^2(\lambda.a + \mu.u(a) + \gamma.u^2(a)) = u^2(0)$ i.e. $\lambda.u^2(a) + \mu.u^3(a) + \gamma.u^4(a) = 0$ par linéarité de u^2.
Or $u^3 = u^4 = 0$ donc $\lambda.u^2(a) = 0$. Comme $u^2(a) \neq 0$, on en tire $\lambda = 0$.
En appliquant maintenant u à $(*)$, on obtient $\mu.u^2(a) + \gamma.u^3(a) = 0$, i.e. $\mu.u^2(a) = 0$. De même, on en tire $\mu = 0$.
$(*)$ s'écrit alors $\gamma.u^2(a) = 0$ ce qui donne de même $\gamma = 0$.
Ainsi, la famille $\mathcal{B} = (a, u(a), u^2(a))$ est libre.
Comme elle a 3 éléments et que $3 = \dim(E)$, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$.

4°) On a $u(a) = 0.a + 1.u(a) + 0.u^2(a)$, $u(u(a)) = u^2(a) = 0.a + 0.u(a) + 1.u^2(a)$, et $u(u^2(a)) = u^3(a) = 0$, d'où :

$$\boxed{\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

5°) Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $H^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(H) = 2$.
Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à H. On a donc $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. De plus, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(H) = 2$, et comme $H^3 = 0$, on a $u^3 = 0$. Ainsi les résultats des questions précédentes s'appliquent, et donc il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

En notant Q la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a donc $J = Q^{-1}HQ$.
Ainsi, $\boxed{H \text{ est semblable à la matrice } J}$.

6°) *Il y a vraiment beaucoup de façons de répondre à cette question !*
T est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc T est inversible. De plus, on a $A = PTP^{-1}$. Ainsi A est le produit de matrices inversibles, $\boxed{\text{elle est donc inversible}}$.

7°) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.
Comme $P^{-1}AP = T$, on a $P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = T^{-1}$ i.e. $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1}$.
Par ailleurs, $(I_3 - N + N^2)T = (I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = I_3^2 - NI_3 + N^2I_3 + I_3N - N^2 + N^2N = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + 0 = I_3$.
En multipliant par T^{-1} à droite (T est bien inversible d'après la question précédente), on obtient $I_3 - N + N^2 = T^{-1}$.
Ainsi, on a bien $\boxed{P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2.}$

8°) En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de N, on a $\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(C_2, C_3)$ puisque $C_1 = 0$.
Comme $\alpha \neq 0$, C_2 et C_3 ne sont pas colinéaires, donc ces deux colonnes forment une famille libre. Donc $\mathrm{rg}(N) = 2$. On a aussi vu que $N^3 = 0$, donc d'après la question 5, $\boxed{N \text{ est semblable à } J}$.

9°) **a)** D'après les calculs de la question 7, $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha^2 - \beta \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Ainsi M est une matrice de la même forme que N (on a bien $-\alpha \neq 0$) : elle est de rang 2 et $M^3 = 0$, ce qui permet d'affirmer toujours d'après la question 5 que $\boxed{M \text{ est semblable à } J}$.

10°) Ainsi, il existe des matrices inversibles Q et R telles que $Q^{-1}NQ = J$ et $R^{-1}MR = J$. Donc :

$$\begin{aligned} M &= RJR^{-1} \\ M &= RQ^{-1}NQR^{-1} \\ M &= \left(R^{-1}\right)^{-1} Q^{-1}NQR^{-1} \\ M &= \left(QR^{-1}\right)^{-1} NQR^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{N \text{ est semblable à } M}$.

11°) Notons S une matrice inversible telle que $S^{-1}NS = M$. On a donc :

$$\begin{aligned} S^{-1}(I_3 + N)S &= S^{-1}I_3S + S^{-1}NS \\ S^{-1}TS &= I_3 + M \\ S^{-1}P^{-1}APS &= P^{-1}A^{-1}P \qquad \text{d'après la question 7} \\ \text{d'où}\quad PS^{-1}P^{-1}APSP^{-1} &= A^{-1} \\ \text{i.e.}\quad \left(P^{-1}\right)^{-1} S^{-1}P^{-1}APSP^{-1} &= A^{-1} \\ \text{i.e.}\quad \left(PSP^{-1}\right)^{-1} A \left(PSP^{-1}\right) &= A^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ est semblable à } A^{-1}.}$