# Devoir surveillé 8.

*Lundi 10 juin 2024, de 7h45 à 11h45.*

**L'usage de calculatrices est interdit**

**AVERTISSEMENT**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

**Le sujet est composé de 3 exercices.**

## Exercice 1

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance $n$ fois une même pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p$, avec $p \in ]0,1[$, et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera $X$ la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et $G$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera $A$ l'événement : « Le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est défavorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire $G$ est strictement négative.

## Partie I

Le forain qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant «À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions sur $p$ et $n$ pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit $Y$ la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.

**1°) a)** On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Montrer que $Z$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

**b)** En déduire $E(Y)$ en fonction de $P(A)$.

**2°) a)** Reconnaître la loi de $X$.

**b)** En déduire que l'on a également : $E(Y) = (1-2p)^n$.

**3°) a)** Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de $n$ et $p$.

**b)** Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ pair.}$$

## Partie II

Le forain souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \dfrac{1}{2}$ ), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) < 0$ ).

**4°)** Exprimer $G$ en fonction de $X$ et $Y$.

En déduire que : $E(G) = 10 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k P(X = k)$.

**5°)** Démontrer que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

**6°)** Montrer que : $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

**7°)** Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ E(G) < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow p < \frac{1}{2}.$$

## Partie III

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier $i$ compris ente 1 et 200, on note alors $X_i$ le nombre de Pile obtenu par le $i$-ème joueur, et $G_i$ le gain algébrique du $i$-ème joueur
On note aussi $J$ la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

**8°)** Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, 200\}$, donner la loi de $G_i$ et calculer son espérance et sa variance.

**9°)** Exprimer la variable aléatoire $J$ en fonction des variables aléatoires $G_i$.
Démontrer alors que $E(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.

**10°)** Justifier que : $P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400)$.

**11°)** Montrer que : $P(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}$.

**12°)** Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

# Exercice 2

$f$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### Partie 1 : Étude de $f$

**1°)** Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

**2°)** **a)** On note : $\forall x \geq 0,\ h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} - \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.
Montrer que $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

**b)** Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer, pour $x > 0$, $f'(x)$ en fonction de $h(x)$.

**c)** En déduire que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

**3°)** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$.

**4°)** **a)** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $f$ en 0.

**b)** Interpréter graphiquement ce résultat.

### Partie 2 : Étude d'une suite

**5°)** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On note $(E_n)$ l'équation : $n \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$.
À l'aide de $f$, justifier que $(E_n)$ admet une unique solution $u_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

**6°)** Justifier que la suite $(u_n)$ est croissante.

**7°)** Montrer que $(u_n)$ admet $+\infty$ pour limite.

**8°)** Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)$.

### Partie 3 : Étude d'une intégrale

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

**9°)** **a)** Justifier que $g$ est bien définie et est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer sa dérivée.

**b)** Quelles sont les variations de $g$ ?

**10°)** Montrer que : $\forall x \geq 1,\ g(x) \geq \dfrac{\pi}{2}(\sqrt{x} - 1)$.
En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

**11°)** À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'expression de $g(x)$ pour $x > 0$.

### Partie 4 : Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(F)$ : $2xy'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

**12°)** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation homogène $(F_0)$ associée à $(F)$.

**13°)** **a)** Soit $x > 0$. Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}\,dt$ à l'aide du changement de variables $u = \sqrt{t}$.

**b)** Déduire une solution particulière de $(F)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**14°)** Déterminer l'ensemble des solutions de $(F)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**15°)** Justifier que $f$ est l'unique solution de $(F)$ sur $\mathbb{R}_+$.

## Exercice 3

On rappelle que deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites *semblables* lorsqu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = B$.

*Remarque : si une telle matrice $P$ existe, alors $A = Q^{-1}BQ$ avec $Q = P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$ : les rôles de $A$ et $B$ sont symétriques. On dit indifféremment que $A$ est semblable à $B$ ou que $B$ est semblable à $A$.*

### Partie 1

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2$.

**1°)** **a)** Soit $k$ un entier naturel non nul tel que $u^k = 0$. Justifier que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^{k-1})$.
En déduire que $2 \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(u^{k-1})\big) \leq 3$.

**b)** Montrer que $\dim\big(\mathrm{Ker}(u^2)\big) = 2$ (*on utilisera deux fois la question précédente*).

**2°)** Montrer qu'il existe au moins un vecteur $a$ de $E$ tel que $u^2(a) \neq 0$.
*On fixe pour la suite de cette partie un tel vecteur $a$.*

**3°)** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a, u(a), u^2(a))$ est une base de $E$.

**4°)** Écrire la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.

**5°)** En déduire que si une matrice $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(H) = 2$, alors $H$ est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

### Partie 2

On considère une matrice $A$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels, avec $\alpha$ non nul.
On se propose de démontrer que la matrice $A$ est semblable à la matrice $A^{-1}$.

Pour la suite de l'exercice, on se donne une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$, et on note $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $T = I_3 + N$.

**6°)** Expliquer pourquoi la matrice $A$ est bien inversible.

**7°)** Calculer $N^3$ puis montrer que : $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

**8°)** Montrer que $N$ est semblable à la matrice $J$ définie dans la partie 1.

**9°)** **a)** Calculer $M = N^2 - N$.

**b)** Justifier sans calcul que $M$ est également semblable à $J$.

**10°)** En déduire que $M$ et $N$ sont semblables.

**11°)** Montrer alors que $A$ et $A^{-1}$ sont semblables.