Correction du devoir surveillé 7.

Exercice 1

1°) a) Il s'agit d'une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré, donc elle est libre. Comme elle comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors, par la formule de Taylor, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$.

Par unicité des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, il vient : pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\boxed{a_k = \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}}$.

2°) a)
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P) = (X-1)P' - 2P$ donc $\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg((X-1)P', \deg(-2P))$.
  $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n-1$, et donc $\deg\left((X-1)P'\right) = 1 + \deg(P') \leq n$.
  Comme $\deg(-2P) \leq n$, on a $\deg\left(\varphi(P)\right) \leq n$ i.e. $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda.P + Q) &= (X-1)\left(\lambda.P + Q\right)' - 2\left(\lambda.P + Q\right) \\
&= (X-1)\left(\lambda.P' + Q'\right) - 2\lambda.P - 2Q \\
&= \lambda(X-1)P' + (X-1)Q' - \lambda.2P - 2Q \\
&= \lambda\left((X-1)P' - 2P\right) + (X-1)Q' - 2Q \\
&= \lambda.\varphi(P) + \varphi(Q)
\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire.
- Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

b) On a $\varphi(1) = -2$.
Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi\left((X-1)^k\right) = (X-1)k(X-1)^{k-1} - 2(X-1)^k = (k-2)(X-1)^k$.
La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{pmatrix}}$$

On constate que la matrice A est bien diagonale.

c) La matrice A est diagonale avec un coefficient diagonal qui est nul donc A n'est pas inversible.
Donc, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas bijective}}$.

d) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X-1), \varphi((X-1)^2, \dots, \varphi((X-1)^n)$ car $\mathcal{B} = (1, X-1, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(-1, -(X-1), 0, (X-1)^3, \dots, (n-2)(X-1)^n)$.
Donc, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, X-1, (X-1)^3, \dots, (X-1)^n)$.

La famille $\boxed{(1, X-1, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n)}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$. De plus elle est échelonnée en degré, formée de polynômes non nuls donc elle est libre. C'est donc $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Im}(\varphi)}$.

On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n}$ puisqu'il y a n vecteurs dans la famille.

e) Par le théorème du rang appliqué à φ, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.
On en déduit que $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n+1-n = 1}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est une droite vectorielle.
Comme $\varphi((X-1)^2) = 0$, on en déduit : $(X-1)^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Comme $(X-1)^2$ n'est pas le vecteur nul, $\boxed{((X-1)^2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi)}$.

f) On sait que $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc, d'après un résultat du cours, en découpant la base en deux sous-familles, on en déduit que :
$\mathrm{Vect}((X-1)^2) \oplus \mathrm{Vect}(1, X-1, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n) = \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_n[X]}$.

3°) a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$u(\lambda.P + Q) = (\lambda.P + Q)''(1) = \lambda P''(1) + Q''(1) = \lambda.u(P) + u(Q)$
Donc u est linéaire ; elle va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{c'est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $P = \dfrac{a}{2}X^2$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ puisque $n \geq 3 \geq 2$, et $u(P) = a$. Donc $a \in \mathrm{Im}(u)$.
Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(u)$ donc $\mathbb{R} = \mathrm{Im}(u)$. Ainsi, $\boxed{u \text{ est surjective.}}$

c) D'après le théorème du rang appliqué à u :

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) &= \dim(\mathbb{R}_n[X]) \\ \text{d'où } \dim(\mathrm{Ker}(u)) &= (n+1) - 1 = \boxed{n} \end{aligned}$$

4°) a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $(\varphi(P))' = (X-1)P'' + P' - 2P' = (X-1)P'' - P'$.
Puis $(\varphi(P))'' = (X-1)P^{(3)} + P'' - P'' = (X-1)P^{(3)}$.
Ainsi $(\varphi(P))''(1) = 0$. Cela signifie que $\boxed{\varphi(P) \in \mathrm{Ker}(u).}$

b) D'après la question précédente, on a $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Or d'après la question 2d, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n = \dim(\mathrm{Ker}(u))$.
D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(u).}$

5°) a) On sait par 2f que $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_n[X]$.
Or, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(u) = \{Q \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ Q''(1) = 0\}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{R \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ (X-1)R' - 2R = 0\}$.
Il vient donc :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \exists!(Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \begin{cases} P = Q + R \\ Q''(1) = 0 \\ (X-1)R' - 2R = 0 \end{cases}}$$

b) On a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(X-1)^k = \sum_{k=0}^{1} a_k(X-1)^k + \sum_{k=3}^{n} a_k(X-1)^k + a_2(X-1)^2$, avec, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(1)}{k!}$.
Or on a vu à la question 2 que $(1, X-1, (X-1)^3, \ldots, (X-1)^n)$ était une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et que $((X-1)^2)$ était une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} a_k(X-1)^k + \sum_{k=3}^{n} a_k(X-1)^k \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $a_2(X-1)^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Par unicité de l'écriture de P dans $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$:
$Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} a_k(X-1)^k + \sum_{k=3}^{n} a_k(X-1)^k \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $R = a_2(X-1)^2$. Ainsi, $\boxed{R = \dfrac{P''(1)}{2}(X-1)^2}$.

Exercice 2

1°) Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$. On a $v(x) = 0$. Donc $v(v(x)) = v(0) = 0$ puisque v est linéaire.
Ainsi $v^2(x) = 0$ i.e. $x \in \mathrm{Ker}(v^2)$.
On a donc bien $\boxed{\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2)}$.

2°) D'après le résultat de la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(v)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(v^2))$.
Si on avait $\dim(\mathrm{Ker}(v^2)) = \dim(\mathrm{Ker}(v))$, comme on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}\, v^2$, on en déduirait : $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(v^2)$. Exclu par hypothèse.
Donc $\dim(\mathrm{Ker}(v)) < \dim(\mathrm{Ker}(v^2))$.
Par le théorème du rang appliqué à v : $\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{rg}(v)$, et par hypothèse, $\mathrm{rg}(v) = 2$, donc $\dim \mathrm{Ker}(v) = 1$.
Ainsi $2 \leq \dim(\mathrm{Ker}(v^2))$.
De plus, $\mathrm{Ker}(v^2)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim(\mathrm{Ker}(v^2)) \leq \dim(E) = 3$, et si on avait $\dim(\mathrm{Ker}(v^2)) = 3$, on aurait $\mathrm{Ker}(v^2) = E$ et donc $v^2 = 0_{L(E)}$: exclu par hypothèse.
Finalement, $\boxed{\dim\left(\mathrm{Ker}(v^2)\right) = 2}$.

3°)
- Vérifions que $v(x) \in \mathrm{Ker}(v^2)$.
  $v^2(v(x)) = v^3(x) = v(v^2(x)) = v(0)$ car $x \in \mathrm{Ker}(v^2)$. D'où, puisque v est linéaire, $v^2(v(x)) = 0$. Ainsi on a bien $v(x) \in \mathrm{Ker}(v^2)$.
- Montrons que la famille $(x, v(x))$ est libre.
  Soit λ et μ des réels. Supposons que : $\lambda x + \mu v(x) = 0$. Montrons que : $\lambda = \mu = 0$.
  Alors $v(\lambda x + \mu v(x)) = v(0) = 0$ d'où, par linéarité de v : $\lambda v(x) + \mu v^2(x) = 0$.
  Or $x \in \mathrm{Ker}(v^2)$ donc $v^2(x) = 0$. Ainsi, $\lambda v(x) = 0$.
  Comme $x \notin \mathrm{Ker}(v), v(x) \neq 0$. Il vient alors : $\lambda = 0$.
  D'où $\mu v(x) = 0$. Donc, toujours avec $v(x) \neq 0$, on obtient : $\mu = 0$.
  Ainsi, la famille $(x, v(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(v^2)$.
- Elle a de plus 2 éléments et $2 = \dim \mathrm{Ker}(v^2)$ donc $\boxed{(x, v(x)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(v^2)}$.

4°) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{par linéarité par rapport à la première ligne} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\
&= (2-\lambda)^2(3-\lambda) \qquad \text{car on a reconnu un déterminant triangulaire}
\end{aligned}$$

Or on a : $A - \lambda I$ est inversible $\iff \det(A - \lambda I) \neq 0$.
Ainsi $\boxed{A - \lambda I \text{ est inversible ssi } \lambda \neq 2 \text{ et } \lambda \neq 3}$.

b) Par la question précédente, $A - 0I = A$ est inversible donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

5°) $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On constate que $C_2 - C_3 = C_1$, donc $\mathrm{rg}(A-2I) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(C_2, C_3)$.

Les deux colonnes C_2 et C_3 ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre, donc $\boxed{\mathrm{rg}(A-2I) = 2}$.

$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On constate que $C_3 = -C_1$, donc $\mathrm{rg}(A-3I) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_2)$.

Les deux colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre, donc $\boxed{\mathrm{rg}(A-3I) = 2}$.

Après calculs, $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les colonnes de cette matrice sont colinéaires, $\mathrm{rg}\left((A-2I)^2\right) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(C_1)$, donc $\boxed{\mathrm{rg}\left((A-2I)^2\right) = 1}$, car la famille (C_1) est libre, étant constituée d'une colonne non nulle.

6°) a) On a déjà : $\{0\} \subset \mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) \cap \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id})$, puisque $\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) \cap \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Réciproquement, soit $u \in \mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) \cap \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id})$. Montrons que $u = 0$.

$(f-2\,\mathrm{id})^2 = f^2 - 4f + 4\,\mathrm{id}$. On a alors : $f^2(u) - 4f(u) + 4u = 0$.

On a aussi : $(f-3\,\mathrm{id})(u) = 0$ donc $f(u) = 3u$.

Donc $f^2(u) = f(f(u)) = f(3u) = 3f(u) = 9u$.

D'où, $9u - 12u + 4u = 0$ ie $u = 0$.

Finalement : $\boxed{\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) \cap \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id}) = \{0\}}$.

b) ★ Par le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $(f-2\,\mathrm{id})^2$:
$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2)) + \mathrm{rg}((f-2\,\mathrm{id})^2)$.
D'où, puisque $\mathrm{rg}((f-2\,\mathrm{id})^2) = \mathrm{rg}((A-2I)^2) = 1$ par la question 5, on en déduit : $\dim \mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) = 2$.

★ Par le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f - 3\,\mathrm{id}$:
$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id})) + \mathrm{rg}(f-3\,\mathrm{id})$.
Comme $\mathrm{rg}(f-3\,\mathrm{id}) = \mathrm{rg}(A-3I) = 2$ par 5, il vient : $\dim(\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id})) = 1$.

★ On a alors, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2)) + \dim(\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id}))$.
De plus, $\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) \cap \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id}) = \{0\}$ par la question a.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{id})^2) \text{ et } \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{id}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$

7°) a) $A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}) &\iff (f - 3\,\mathrm{id})(u) = 0 \\
&\iff (A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\iff y = 0, x = z
\end{aligned}$$

Donc, $\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}((1, 0, 1))$.
On choisit $\boxed{\varepsilon_3 = (1, 0, 1)}$.

Autre méthode : $A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $A - 3I$ représente $g = f - 3\,\mathrm{id}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On remarque que $g(e_1) + g(e_3) = 0$ ie $g(e_1 + e_3) = 0$.
Ainsi, $e_1 + e_3 = (1, 0, 1) \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$.

b) $(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2) &\iff (f - 2\,\mathrm{id})^2(u) = 0 \\
&\iff (A - 2I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff 3x + y - 2z = 0
\end{aligned}$$

On choisit $\boxed{\varepsilon_2 = (1, 1, 2)}$.

Autre méthode : $(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $(A - 2I)^2$ représente $h = (f - 2\,\mathrm{id})^2$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On remarque que $h(e_1) + h(e_2) + 2h(e_3) = 0$ donc $h(e_1 + e_2 + 2e_3) = 0$.
Ainsi, $e_1 + e_2 + 2e_3 = (1, 1, 2) \in \operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2)$.

c) On a $\varepsilon_1 = (f - 2\mathrm{id})(\varepsilon_2)$ donc ses coordonnées sont données par :
$(A - 2I)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\varepsilon_1 = (1, -1, 1)}$.
$\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}((f - 2\mathrm{id})^2)$ par construction, et $(f - 2\mathrm{id})(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $\varepsilon_2 \notin \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker}((f - 2\mathrm{id})^2) \neq \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id})}$.

d) On pose : $v = f - 2\,\mathrm{id}$.

- v est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est dimension 3.
- Puisque $A - 2I$ est la matrice de v dans la base canonique, $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(A - 2I) = 2$ d'après la question 5.
- $(A - 2I)^2 \neq 0$ donc $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
- $\mathrm{Ker}(v^2) \neq \mathrm{Ker}(v)$ d'après la question c.

Toutes les hypothèses de la partie 1 sont vérifiées, et nous avons vu à la question c que ε_2 est dans $\mathrm{Ker}(v^2)$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(v)$.

Donc, la famille $(\varepsilon_2, v(\varepsilon_2))$ est une base de $\mathrm{Ker}(v^2) = \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2)$, donc $(v(\varepsilon_2), \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ aussi.

De plus, ε_3 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$, donc il forme une famille libre de ce sous-espace vectoriel, qui est de dimension 1. Donc (ε_3) est une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$.

On a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$ donc, en réunissant deux bases de chacun de ces sous-espaces vectoriels, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } \mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

8°) $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2 = (f - 2\,\mathrm{id})(\varepsilon_2)$.

D'où $(f - 2\,\mathrm{id})(\varepsilon_1) = (f - 2\,\mathrm{id})^2(\varepsilon_2) = 0$, car $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2)$.

Donc $f(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1$.

$f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ car $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2$.

$\varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$ donc $f(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_3$.

On en déduit que : $\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

9°) a) $\boxed{A = PTP^{-1}}$ par les formules de changements de bases.

b) $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$.

Calculons P^{-1} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

10°) a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H_n : \exists \alpha_n \in \mathbb{R},\ T^n = \begin{pmatrix} 2^n & \alpha_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

★ H_0 est vraie avec $\alpha_0 = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.

$$T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 2^n & \alpha_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + 2\alpha_n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie en posant $\boxed{\alpha_{n+1} = 2^n + 2\alpha_n}$.

★ Par principe de récurrence, $\boxed{\text{la propriété est démontrée pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{2^n + 2\alpha_n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha_n}{2^n} = u_n + \dfrac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n\dfrac{1}{2} = n\dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$ puisque $\alpha_0 = 0$.

On en tire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = u_n 2^n = \boxed{n2^{n-1}}$.

11°) a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : $f^n(\varepsilon_1) = 2^n\varepsilon_1$ et $f^n(\varepsilon_3) = 3^n\varepsilon_3$.

- On a $f^0 = \mathrm{id}$ donc $f^0(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = 2^0\varepsilon_1$, et $f^0(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 = 3^0\varepsilon_3$. Ainsi H_0 est vraie.
- Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  Nous avons déjà vu que $f(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1$, donc $f^{n+1}(\varepsilon_1) = f^n(f(\varepsilon_1)) = f^n(2\varepsilon_1) = 2f^n(\varepsilon_1)$.
  Donc, avec l'hypothèse de récurrence, $f^{n+1}(\varepsilon_1) = 22^n\varepsilon_1 = 2^{n+1}\varepsilon_1$.
  Comme $f(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_3$, on montre de même que $f^{n+1}(\varepsilon_3) = 3^{n+1}\varepsilon_3$. Ainsi H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^n(\varepsilon_1) = 2^n\varepsilon_1 \text{ et } f^n(\varepsilon_3) = 3^n\varepsilon_3.}$

b) On a $f = v + 2\mathrm{id}$. v et $2\mathrm{id}$ commutent, donc par la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = (v + 2\mathrm{id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^k \circ (2\mathrm{id})^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^k \circ 2^{n-k}\mathrm{id}$$

$$\boxed{f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} v^k}$$

c) Comme $T = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}} f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}} f^n$.

Nous avons déjà calculé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(\varepsilon_1)$ et $f^n(\varepsilon_3)$ en fonction des éléments de $\mathcal{C}$, intéressons-nous à $f^n(\varepsilon_2)$.

On a $v^0(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, $v^1(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ par construction de ε_1, et $v^2(\varepsilon_2) = 0$ puisque $\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}(v^2)$.
Ainsi, pour tout $k \geq 2$, $v^k(\varepsilon_2) = 0$.

On a donc, grâce à la question précédente, pour tout $n \geq 1$:

$$f^n(\varepsilon_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} v^k(\varepsilon_2) = \binom{n}{0} 2^n v^0(\varepsilon_2) + \binom{n}{1} 2^{n-1} v^1(\varepsilon_2)$$
$$f^n(\varepsilon_2) = 2^n\varepsilon_2 + n2^{n-1}\varepsilon_1.$$

Cette formule est encore valable pour $n = 0$ car $f^0(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$.

Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$.

12°) $A = PTP^{-1}$.

- Pour $n=0$, on a $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$.
- Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$:
$A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$.
- Ainsi, on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1}+2^n & 3^n \\ -2^n & -n2^{n-1}+2^n & 0 \\ 2^n & n2^{n-1}+2^{n+1} & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} -2^{n+1}-n2^{n-1}+3^{n+1} & 3^n-2^n & 2^{n+1}+n2^{n-1}-2.3^n \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ -3.2^n-n2^{n-1}+3^{n+1} & 3^n-2^n & 3.2^n+n2^{n-1}-2.3^n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1°) On note $A = (a_{i,j})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}+x & \dots & a_{1,2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n,1}+x & a_{2n,2}+x & \dots & a_{2n,2n}+x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}-a_{1,1} & \dots & a_{1,2n}-a_{1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n,1}+x & a_{2n,2}-a_{2n,1} & \dots & a_{2n,2n}-a_{2n,1} \end{vmatrix} \qquad \text{en effectuant } \left\{ \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - C_1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On développe le déterminant par rapport à sa première colonne :
il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ (indépendants de x) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda_1(a_{1,1}+x) + \dots + \lambda_{2n}(a_{2n,2n}+x).$$

Ainsi, f est une combinaison linéaire de fonctions polynomiales de degré 1.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à } 1}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \det(A - xJ) \\
&= \det((A-xJ)^T) \\
&= \det(A^T - xJ^T) && \text{par linéarité de la transposition} \\
&= \det(-A - xJ) && \text{car } A \text{ est antisymétrique et } J \text{ est symétrique} \\
&= \det(-(A+xJ)) \\
&= (-1)^{2n}\det(A+xJ) && \text{car } A+xJ \text{ est d'ordre } 2n \\
&= \det(A+xJ) && \text{car } 2n \text{ est pair} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est paire}}$.

3°) f est une fonction polynomiale de degré au plus 1 et f est paire donc l'expression $f(x)$ ne contient pas de puissance impaire. Ainsi, f est constante donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$.
On en déduit que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \det(A+xJ) = \det(A)}$.