Devoir surveillé 7.

Samedi 4 mai 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge***.
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Le sujet est composé de 3 exercices.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

1°) a) Justifier que $\mathcal{B} = \big(1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Notons $(a_0, \ldots, a_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Sans calcul, exprimer les a_k en fonction des dérivées successives de P.

Remarque : l'expression des a_k ne sert pas dans la suite du problème sauf en question 5b.

2°) On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = (X-1)P' - 2P$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.
On vérifiera que cette matrice est diagonale.

c) En déduire que φ n'est pas bijective.

d) Donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que vaut sa dimension ?

e) En déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$; on en donnera une base.

f) Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.

3°) On pose $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P''(1). \end{array}$

a) Montrer que u est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que u est surjective.

c) Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$?

4°) a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathrm{Ker}(u)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(u)$.

5°) a) En utilisant les questions précédentes, justifier que tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = Q + R$, où Q et R sont des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} Q''(1) = 0 \\ (X-1)R' - 2R = 0. \end{cases}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. A l'aide de la question 1b, exprimer R en fonction de P''.

Exercice 2

Partie 1 : Un résultat préliminaire

Soit v un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3.
On suppose que v est de rang 2 avec $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{Ker}(v^2) \neq \mathrm{Ker}(v)$.

1°) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(v^2)$.

2°) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(v^2)$.

3°) Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(v^2)$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(v)$.
Montrer que la famille $(x, v(x))$ est une base de $\mathrm{Ker}(v^2)$.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

On note id l'identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4°) **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(A - \lambda I)$.
En déduire que $A - \lambda I$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 3$.

b) L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

5°) Calculer les rangs des matrices $A - 2I$, $A - 3I$ et $(A - 2I)^2$.

6°) **a)** Montrer que $\mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}) = \{0\}$.

b) Justifier que $\mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{id})^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}) = \mathbb{R}^3$.

7°) **a)** Déterminer un vecteur ε_3 de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id})$ de la forme $\varepsilon_3 = (1, x, y)$ où x et y sont des réels.

b) Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathrm{Ker}\left((f - 2\,\mathrm{id})^2\right)$ de la forme $\varepsilon_2 = (1, 1, z)$ où z est un réel.

c) On pose $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2$.
Calculer le vecteur ε_1, et justifier que $\mathrm{Ker}\left((f - 2\,\mathrm{id})^2\right) \neq \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

d) À l'aide du résultat préliminaire établi dans la partie 1, justifier <u>sans calcul</u> que la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8°) Soit la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

Déduire des questions précédentes que : $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie 3 : Calcul de A^n

9°) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

a) Quelle relation existe-t-il entre A, T et P ?

b) Donner P puis calculer P^{-1}.

10°) *Première méthode de calcul de T^n*

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \alpha_n \in \mathbb{R},\ T^n = \begin{pmatrix} 2^n & \alpha_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On précisera la valeur de α_0 ainsi qu'une relation reliant α_{n+1} et α_n.

b) En étudiant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\alpha_n}{2^n}$, déterminer α_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

11°) *Deuxième méthode de calcul de T^n*
On n'utilisera pas les résultats de la question 10 pour traiter cette question.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(\varepsilon_1) = 2^n \varepsilon_1$ et $f^n(\varepsilon_3) = 3^n \varepsilon_3$.

b) On pose $v = f - 2\mathrm{id}$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n en fonction des puissances de v.

c) En déduire l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de T^n.

12°) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on donnera ses 9 coefficients).

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
On suppose que A est antisymétrique.
On note J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
L'objectif de l'exercice est de prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \det(A + xJ) = \det(A).$$

1°) On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \det(A + xJ)$.
Justifier que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

2°) Montrer que f est paire.

3°) Conclure.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ FIN ∗ ∗ ∗ ∗ ∗