Correction du devoir surveillé 6.

Exercice 1

1°) a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ a.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) Soient $(N, M) \in \mathcal{N}^2$.

Il existe des réels a, b, c, a', b', c' tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons :

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $NM = \begin{pmatrix} 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a'' = c'' = 0$ et $b'' = ac'$, donc $\boxed{NM \in \mathcal{N}}$.

c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$. D'après le calcul de la question précédente, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{N^3 = 0}$.

2°) a) La matrice nulle n'est pas dans $\mathcal{U}$, puisque les éléments de $\mathcal{U}$ sont des matrices dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Donc $\boxed{\mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) Soient $(A, B) \in \mathcal{U}^2$, il existe des matrices N et M de $\mathcal{N}$ telles que $A = I + N$ et $B = I + M$. Donc $AB = (I + N)(I + M) = I + N + M + NM$.

Comme $\mathcal{N}$ est stable par produit, $NM \in \mathcal{N}$; et comme $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il est stable par somme, donc $N + M + NM \in \mathcal{N}$.

Ainsi, $AB \in \mathcal{U}$. Donc $\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit.}}$

c) Comme les matrices de $\mathcal{U}$ sont toutes triangulaires avec tous leurs coefficients diagonaux non nuls (égaux à 1), elles sont toutes inversibles. Autrement dit, $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$.

3°) a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{N}$ est stable par produit, $N^2 \in \mathcal{N}$. Comme $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$.

Comme $U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$, cela justifie que $\boxed{U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}}$.

b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. calculons :

$$\begin{aligned}
U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)\left(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2\right) \\
&= I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2 + \alpha N + \alpha\beta N^2 + \alpha\frac{\beta(\beta-1)}{2}N^3 \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta N^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{\beta(\beta-1)}{2}N^4 \\
&= I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2 + \alpha N + \alpha\beta N^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 \quad \text{car } N^3 = 0 \text{ et donc } N^4 = 0 \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \frac{\beta^2 - \beta + 2\alpha\beta + \alpha^2 - \alpha}{2}N^2 \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}N^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)}}$$

$U^{(\alpha)} = I + M$ avec $M = \alpha N + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2$ donc :

$$\begin{aligned}
\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} &= I + \beta M + \frac{\beta(\beta-1)}{2}M^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha^2 N^2 + 2\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2}N^3 + \frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{2^2}N^4\right) \\
&\qquad \text{par la formule du binôme car } N \text{ et } N^2 \text{ commutent} \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1) + \beta(\beta-1)\alpha^2}{2}N^2 \qquad \text{car } N^3 = N^4 = 0 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{-\alpha\beta + \beta^2\alpha^2}{2}N^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}}$$

c) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n : U^{(n)} = U^n$.

- $U^{(1)} = I + 1.N + \dfrac{1(1-1)}{2}N^2 = I + N = U = U^1$, donc P_1 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
U^{(n+1)} &= U^{(n)}U^{(1)} \\
&= U^n U^1 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence, et parce que } P_1 \text{ est vraie} \\
&= U^{n+1}
\end{aligned}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, U^{(n)} = U^n}$.

d) Comme I et N commutent, par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} U^n = (I+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \qquad \text{car si } k \geq 3,\ N^k = 0 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 \\ &= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{U^n = U^{(n)}}$$

Par ailleurs, $U^0 = I$ et $U^{(0)} = I + 0.N + \dfrac{0(0-1)}{2} N^2 = I$, donc le résultat est encore vrai pour $n = 0$, également pour $n = 1$ comme vu à la question précédente (c'était P_1).

e) On a : $U^{(-1)} = I - N + \dfrac{(-1)(-1-1)}{2} N^2 = I - N + N^2$.
Calculons : $U^{(-1)} \times U = (I - N + N^2)(I + N) = I + N - N - N^2 + N^2 + N^3 = I$ (puisque $N^3 = 0$). De même, on trouve $U \times U^{(-1)} = I$, donc $\boxed{U^{-1} = U^{(-1)}}$.

4°) a) D'après la question 3, $U = U^{(1)} = U^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = U^{(\frac{1}{2})} U^{(\frac{1}{2})} = \left(U^{(\frac{1}{2})}\right)^2$, donc $\boxed{C = U^{(\frac{1}{2})}}$ convient.

Comme $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc on obtient $C = I + \dfrac{1}{2} N + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} N^2 = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ vérifie } C^2 = U}$.

b) Comme la matrice C telle que $C^2 = U$ proposée à la question 4a est unipotente, elle est non nulle, donc $C \neq -C$, et $-C$ est une autre matrice solution, puisque $(-C)^2 = C^2 = U$. Donc $\boxed{\text{il n'y a pas une unique solution à l'équation } C^2 = U}$.

Exercice 2

1°) On note, pour $n \in \mathbb{N}, H_n : F_n \in \mathbb{N}$.

★ H_0 et H_1 sont vraies.

★ On suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$: $F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}$.
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ est élément de $\mathbb{N}$ comme somme de deux éléments de $\mathbb{N}$.
Donc H_{n+2} est vraie.

★ On a montré par récurrence double que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}}$.

2°) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, H_n : A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

★ Pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A = A^1$. Donc H_1 est vraie.

★ On suppose H_n vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}}$.

3°) $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, $\boxed{\text{en posant } F_{-1} = 1}$, on a bien $A^0 = \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{pmatrix}$.

4°) a) Soit $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

$A^{n+m} = A^n \times A^m$ donc $\begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}$.

En considérant par exemple le coefficient d'indice $(2,1)$: $\boxed{F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $F_{2p+1} = F_{(p+1)+p}$.

On pose : $n = p+1$ et $m = p$. On a bien $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.

Donc, par la question précédente : $F_{2p+1} = F_{p+1}^2 + F_p^2$.

De plus, par 1, F_{p+1} et F_p sont entiers.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ F_{2p+1} \text{ est la somme de deux carrés d'entiers}}$.

Exemple : On calcule les premières valeurs de la suite (F_n).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

$89 = F_{11} = F_{2\times 5+1}$ donc $89 = F_6^2 + F_5^2$ ie $\boxed{89 = 8^2 + 5^2}$.

5°) a) $A^2 = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{A^2 = A + I}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $A^2 = A + I$. $A^{2n} = (A^2)^n = (A+I)^n$.

Or A et I commutent donc, par la formule du binôme de Newton :

$A^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$.

En évaluant par exemple le coefficient d'indice $(2,1)$: $\boxed{F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k}$.

6°) a) On effectue 2 calculs :

$$\begin{aligned} &(I-A)\times(-A) = -A + A^2 = -A + A + I = I \qquad \text{en utilisant 5a} \\ &(-A)\times(I-A) = -A + A^2 = I \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{I - A \text{ est inversible et } (I-A)^{-1} = -A}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(I-A)(I + A + A^2 + \cdots + A^n) = I + A + A^2 + \cdots + A^n - (A + A^2 + \cdots + A^{n+1})$.

Par téléscopage, $\boxed{(I-A)(I + A + A^2 + \cdots + A^n) = I - A^{n+1}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme $I - A$ est inversible, en multipliant l'égalité précédente à gauche par $(I-A)^{-1}$: $I + A + \cdots + A^n = (I-A)^{-1}(I - A^{n+1})$.
Or $(I-A)^{-1} = -A$ par 6a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^k = -A(I - A^{n+1}) = A^{n+2} - A$.
Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
En explicitant le coefficient d'indice $(2,1)$: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1}$.

Exercice 3

1°) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y + 2(\lambda z + z), \lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (\lambda(x + y + 2z) + x' + y' + 2z', \lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= \lambda(x + y + 2z, x, y) + (x' + y' + 2z', x', y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. De plus, f va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

2°) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker} f &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}}$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est injective}}$.

3°) **a)** Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) = f(x + y + 2z, x, y) \\ &= (x + y + 2z + x + 2y, x + y + 2z, x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f^2(x, y, z) = (2x + 3y + 2z, x + y + 2z, x)}$$

$$f^3(x, y, z) = f(f^2(x, y, z))$$

$$\boxed{f^3(x, y, z) = (5x + 4y + 4z, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)}$$

b) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (f^2 + f + 2\mathrm{id})(x, y, z) &= f^2(x, y, z) + f(x, y, z) + 2(x, y, z) \\ &= (2x + 3y + 2z, x + y + 2z, x) + (x + y + 2z, x, y) + (2x, 2y, 2z) \\ &= (5x + 4y + 4z, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z) \\ &= f^3(x, y, z), \end{aligned}$$

donc $\boxed{f^3 = f^2 + f + 2\mathrm{id}}$.

c) On en déduit que $f^3 - f^2 - f = 2\mathrm{id}$, ce qui peut s'écrire :

$$f \circ \left(\frac{1}{2}\left(f^2 - f - \mathrm{id}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\left(f^2 - f - \mathrm{id}\right)\right) \circ f = \mathrm{id}$$

On en tire que $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et que $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{2}\left(f^2 - f - \mathrm{id}\right)}$.

4°) a)

$$\begin{aligned}
g^2 &= (f^2 + f + \mathrm{id}) \circ (f^2 + f + \mathrm{id}) \\
&= f^2 \circ f^2 + f \circ f^2 + f^2 \circ \mathrm{id} + f \circ f^2 + f \circ f + f \circ \mathrm{id} + \mathrm{id} \circ f^2 + \mathrm{id} \circ f + \mathrm{id} \circ \mathrm{id} \\
&= f^4 + 2f^3 + 3f^2 + 2f + \mathrm{id} \\
&= (f^3 + f^2 + 2f) + 2(f^2 + f + 2\mathrm{id}) + 3f^2 + 2f + \mathrm{id} \qquad \text{car } f^3 = f^2 + f + 2\mathrm{id} \\
&= (f^2 + f + 2\mathrm{id}) + 6f^2 + 6f + 5\mathrm{id} \\
&= 7f^2 + 7f + 7\mathrm{id}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g^2 = 7g}$.

b) p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $p^2 = \dfrac{1}{7^2}g^2 = \dfrac{1}{7}g = p$, donc $\boxed{p \text{ est un projecteur}}$.

c) On a $f^3 = f^2 + f + 2\mathrm{id}$, donc $g = f^3 - \mathrm{id}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = (4x + 4y + 4z, 2x + 2y + 2z, x + y + z)}$.
On sait que $\boxed{p \text{ est la projection sur } \mathrm{Im}(p) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(p)}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(p) &\iff p(x,y,z) = 0 \\
&\iff g(x,y,z) = 0 \\
&\iff x + y + z = 0 \\
&\iff x = -y - z
\end{aligned}$$

Donc $\quad \mathrm{Ker}(p) = \left\{(-y - z, y, z) \ / \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \ / \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$\boxed{\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0), (-1,0,1)\right)}$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x,y,z) = \dfrac{x + y + z}{7}(4,2,1)$.
$\dfrac{x + y + z}{7}$ décrit $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left((4,2,1)\right)}$.

d) q est la projection associée à p, autrement dit $\boxed{\text{la projection sur } \mathrm{Ker}(p) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(p)}$.

5°) a) $p \circ q = p \circ (\mathrm{id} - p) = p - p^2$ donc $\boxed{p \circ q = 0}$. De même, $\boxed{q \circ p = 0}$.
$f^3 = g + \mathrm{id} = 7p + \mathrm{id}$ donc $\boxed{f^3 = 8p + q}$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n : f^{3n} = 8^n p + q$.

- $f^0 = \mathrm{id}$, et $8^0 p + q = p + q = \mathrm{id}$. Donc H_0 est vraie.
- On suppose H_n vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned}
f^{3(n+1)} &= f^{3n+3} = f^{3n} \circ f^3 \\
&= (8^n p + q) \circ (8p + q) \\
&= 8^{n+1}p^2 + 8^n p \circ q + 8q \circ p + q^2 \\
&= 8^{n+1}p + q
\end{aligned}$$

  Donc H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{3n} = 8^n p + q.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $p = \dfrac{1}{7}g$ et $q = \mathrm{id} - p$, $f^{3n} = \dfrac{8^n}{7}g + \mathrm{id} - \dfrac{1}{7}g$ donc $\boxed{f^{3n} = \dfrac{8^n - 1}{7}g + \mathrm{id}}$.

6°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = (x_{n+3}, x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+2} + x_{n+1} + 2x_n, x_{n+2}, x_{n+1})$.

Donc, $\boxed{X_{n+1} = f(X_n)}$.

b) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = f^n(X_0)$.

- C'est vrai au rang 0 car $f^0 = \mathrm{id}$ donc $f^0(X_0) = X_0$.
- Si c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, alors $X_{n+1} = f(X_n) = f\left(f^n(X_0)\right) = f^{n+1}(X_0)$.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = f^n(X_0)}$.

c) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(x_{3n+2}, x_{3n+1}, x_{3n}) = X_{3n} &= f^{3n}(X_0)\\ &= \frac{8^n - 1}{7}g(x_2, x_1, x_0) + \mathrm{id}(x_2, x_1, x_0)\\ &= \frac{8^n - 1}{7}(4x_2 + 4x_1 + 4x_0, 2x_2 + 2x_1 + 2x_0, x_2 + x_1 + x_0) + (x_2, x_1, x_0)\end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\begin{cases} x_{3n+2} = \dfrac{8^n - 1}{7}(4x_2 + 4x_1 + 4x_0) + x_2 \\ x_{3n+1} = \dfrac{8^n - 1}{7}(2x_2 + 2x_1 + 2x_0) + x_1 \\ x_{3n} = \dfrac{8^n - 1}{7}(x_2 + x_1 + x_0) + x_0 \end{cases}}$

Exercice 4

1°) Supposons que P soit solution de $(*)$ et que a soit racine de P. Évaluons $(*)$ en $a + 1$:

$$P((a+1)^2 - 1) = P(a + 1 - 1)P(a + 1 + 1) = P(a)P(a + 2) = 0 \text{ car } P(a) = 0.$$

Ainsi $\boxed{(a+1)^2 - 1 \text{ est racine de } P}$.

De même, en évaluant en $a - 1$, on trouve que $\boxed{(a-1)^2 - 1 \text{ est racine de } P}$.

2°) a) On suppose $a > 0$. On note, pour $n \in \mathbb{N}, H_n : u_n > 0$.

- On a $u_0 = a > 0$ par hypothèse donc H_0 est vraie.
- Supposons que H_n est vraie pour pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n > 0$ comme somme de deux réels strictement positifs. Donc H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ comme somme de deux réels strictement positifs.

Donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.

- H_0 est vraie car $u_0 + 1 = a + 1 = (a+1)^{2^0}$.
- Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a alors

$$u_{n+1} + 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2 = \left((a+1)^{2^n}\right)^2 = (a+1)^{2^{n+1}}.$$

  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n + 1 = (a+1)^{2^n}}$.

3°) Supposons P solution de $(*)$ et a racine de P. Posons, $\forall\, n \in \mathbb{N} : H_n : u_n$ est racine de P.

- H_0 est vraie par hypothèse car $u_0 = a$.

- Supposons que H_n soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Comme u_n est racine de P, en appliquant le résultat de la question 1, on a que $(u_n+1)^2-1 = u_n^2 + 2u_n = u_{n+1}$ est racine de P.
- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est racine de } P}$.

4°) a) Raisonnons par l'absurde : supposons que P admette au moins une racine réelle strictement positive a. On définit la suite (u_n) comme en question 2. D'après la question 3, tous les réels u_n sont racines de P. Par ailleurs, comme $u_0 = a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante par la question 2.a. Ainsi P admet une infinité de racines distinctes ; donc P est nul, donc constant. Exclu par hypothèse. Donc $\boxed{P \text{ n'admet pas de racine strictement positive}}$.

b) Si -1 était racine de P, alors, en utilisant la question 1, le réel $(-1-1)^2 - 1 = 3 > 0$ serait également racine de P, ce qui est impossible d'après la question précédente.
Donc $\boxed{-1 \text{ n'est pas racine de } P}$.

5°) a) D'après ce qui précède, comme a est une racine complexe de P, les complexes u_n définis en question 2 sont des racines de P.
Puisque P est non constant, il est non nul, donc il n'a qu'un nombre fini de racines. Donc la suite (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc (u_n+1) aussi, donc la suite réelle $(|u_n+1|)$ aussi ; ainsi $\boxed{(v_n) \text{ ne prend qu'un nombre fini de valeurs}}$.

b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda^{2^n}$.
Si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$, la suite (w_n) est constante donc non strictement monotone.
Supposons maintenant $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$, et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{\lambda^{2^{n+1}}}{\lambda^{2^n}} = \lambda^{2^{n+1}-2^n} = \lambda^{2^n}$.
Comme $2^n > 0$, si $\lambda > 1$, $\lambda^{2^n} > 1$, et si $\lambda \in]0,1[$, $\lambda^{2^n} < 1$.
Ainsi (w_n) est strictement croissante si $\lambda > 1$ et strictement décroissante si $\lambda \in]0,1[$.
Finalement, $\boxed{\text{la suite est strictement monotone si et seulement si } \lambda \text{ est différent de 0 et de 1}}$.

c) Reprenons la suite (v_n) définie à la question a. D'après la question 2.b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left|(a+1)^{2^n}\right| = \lambda^{2^n}$ avec $\lambda = |a+1|$.
D'après la question précédente, si $|a+1| \notin \{0,1\}$, alors la suite (v_n) est strictement monotone, ce qui est exclu puisqu'elle prend seulement un nombre fini de valeurs d'après la question a. On a donc nécessairement $|a+1| = 1$ ou $|a+1| = 0$.
$|a+1| = 0 \iff a = -1$, ce qui est exclu d'après la question 4.b.
Ainsi on a $\boxed{|a+1| = 1}$.

d) Comme P est non constant, P admet au moins une racine complexe ; notons a une telle racine. Écrivons a sous forme algébrique : $a = x + iy$, avec x et y des réels.
D'après la question précédente, $|a+1| = 1$ et $|a-1| = 1$, d'où, en passant au carré :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 0 \\ -4x = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x = 0$ et donc $y^2 = 0$, donc $y = 0$. Donc $a = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la seule racine de } P \text{ est } 0}$.

6°)
- D'après ce qui précède, Les polynômes non constants vérifiant $(*)$ sont des polynômes complexes n'admettant que 0 pour racine, donc de la forme αX^k avec $\alpha \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
- Réciproquement, soit P un polynôme de la forme $P = \alpha X^k$, avec $\alpha \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P \text{ vérifie } (*) &\iff \alpha(X^2-1)^k = \alpha^2(X-1)^k(X+1)^k \\ &\iff (X^2-1)^k = \alpha\left((X-1)(X+1)\right)^k \text{ car } \alpha \neq 0 \\ &\iff (X^2-1)^k = \alpha(X^2-1)^k \\ &\iff 1 = \alpha \text{ car } (X^2-1)^k \text{ n'est pas le polynôme nul} \end{aligned}$$

- En conclusion, l'ensemble des polynômes non constants solutions de $(*)$ est $\boxed{\left\{X^k \ / \ k \in \mathbb{N}^*\right\}}$.