Devoir surveillé 6.

Samedi 23 mars 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Le sujet est composé de 4 exercices.

Exercice 1

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui sont les matrices s'écrivant $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) *Étude de $\mathcal{N}$.*

a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, i.e. que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.

c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.

2°) *Étude de $\mathcal{U}$.*

a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.

b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.

c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3°) Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2.$$

Dans la question 3, on n'explicitera pas les coefficients de la matrice N ni de la matrice $U^{(\alpha)}$.

Important : On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

a) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.

b) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que $U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$.

d) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour tout entier $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?

e) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

4°) Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$.

a) En utilisant les résultats de la question 3, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = U$.

Application : Déterminer une telle matrice C pour $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Justifier que cette matrice C n'est pas unique.

Exercice 2

On définit la suite (F_n) par : $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.

2°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

3°) Donner une valeur à F_{-1} pour que l'égalité précédente soit aussi valable pour $n = 0$.

4°) **Première application :**

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. En considérant A^{n+m}, montrer que : $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$.

b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_{2p+1} peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

Exemple : Décomposer 89 comme une somme de deux carrés d'entiers.

5°) **Deuxième application :**

a) Vérifier $A^2 = A + I$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.

6°) **Troisième application :**

a) Montrer que $I - A$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = -A$.

b) Développer et simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^n)$.

c) Déduire des deux questions précédentes que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

Exercice 3

On note f l'application définie définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y + 2z, x, y)$$

L'application identité de $\mathbb{R}^3$ sera notée id.

1°) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2°) Déterminer Ker f. Que peut-on en déduire ?

3°) **a)** Déterminer f^2 et f^3.

b) Vérifier que $f^3 = f^2 + f + 2\mathrm{id}$.

c) En déduire que f est une bijection et déterminer f^{-1}.

4°) On pose $g = f^2 + f + \mathrm{id}$.

a) Montrer que $g^2 = 7g$.

b) En déduire que $p = \dfrac{1}{7} g$ est un projecteur.

c) Exprimer $g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis caractériser la projection p.
On écrira les sous-espaces vectoriels associés à p sous forme de Vect.

d) Soit $q = \mathrm{id} - p$. Que peut-on dire de q ?

5°) a) Montrer que $poq = qop = 0$ et $f^3 = 8p + q$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{3n} = 8^n p + q$.

c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^{3n} en fonction de n, g et id.

6°) *Application :* Soit (x_n) une suite de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + 2x_n$$

a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (x_{n+2}, x_{n+1}, x_n)$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.

b) En déduire X_n en fonction de X_0 pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Donner l'expression, pour $n \in \mathbb{N}$, de $x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}$ en fonction de n, x_0, x_1, x_2.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes complexes P non constants vérifiant :

$$(*) \qquad P(X^2 - 1) = P(X-1)P(X+1).$$

REMARQUE : Les expressions $P(X^2 - 1)$, $P(X-1)$ et $P(X+1)$ désignent des compositions de polynômes et non des produits.

1°) Montrer que si P est solution de $(*)$ et si a est une racine de P, alors $(a+1)^2 - 1$ et $(a-1)^2 - 1$ sont racines de P.

2°) Soit $a \in \mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n. \end{cases}$$

a) Montrer que, si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors (u_n) est une suite à termes strictement positifs et est strictement croissante.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.

3°) Vérifier que si P est solution de $(*)$ et si a est une racine de P, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P (où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question 2).

4°) Dans cette question, P désigne un polynôme non constant solution de $(*)$.

a) Montrer à l'aide des questions précédentes que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

b) Montrer alors que -1 n'est pas racine de P.

5°) Dans cette question, P désigne un polynôme non constant solution de $(*)$.

a) On suppose que a est une racine de P, et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n + 1|$ (où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question 2).

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

b) Soit λ un réel positif. Montrer que la suite $(\lambda^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone si et seulement si $\lambda \notin \{0, 1\}$.

c) Montrer à l'aide des questions précédentes que si a est une racine de P, alors $|a+1| = 1$.

On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

d) Montrer que 0 est la seule racine de P.

6°) Déterminer finalement l'ensemble des polynômes non constants solutions de $(*)$.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$