Devoir surveillé 5.

Samedi 10 février 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Le sujet est composé de 4 exercices.

Exercice 1

On considère l'équation fonctionnelle :

$$(*) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad [\,1 - f(x)f(y)\,]\; f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $(*)$.

Dans les questions 1) à 5), on *suppose* que f est une fonction qui vérifie toutes les conditions ci-dessus.

1°) *Premières propriétés de f.*

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que f est impaire.

2°) *Limite de f en $+\infty$*

a) Justifier que, pour tout réel x : $\left(1 - f(x)^2\right) f(2x) = 2f(x)$.

b) Montrer qu'il est impossible que f ait une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que, si f possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$, alors cette limite est nécessairement 0.

3°) *L'ensemble des zéros de f.*

On note désormais $\mathcal{S}$ l'ensemble des "zéros" de f, c'est-à-dire : $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = 0\}$.

a) Justifier que $\mathcal{S} \neq \varnothing$.

b) Montrer que si $x \in \mathcal{S}$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $mx \in \mathcal{S}$.

c) Montrer que si $x \in \mathcal{S}$, alors $\dfrac{x}{2} \in \mathcal{S}$.

4°) *Un raisonnement par l'absurde.*

Dans cette question, on souhaite montrer que $\mathcal{S} \neq \{0\}$.
On raisonne par l'absurde : on suppose que $\mathcal{S} = \{0\}$.

a) Montrer que f a un signe constant strict sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Montrer que $f(y) - f(x)$ est du signe de $f(y-x)$ (au sens strict).

c) Dans le cas où f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Que peut-on dire dans l'autre cas ?

d) En utilisant la question 2.c, conclure.

5°) *Détermination de l'ensemble S.*

a) Montrer qu'il existe un réel a strictement positif dans $\mathcal{S}$.

b) On peut donc fixer un réel $a \in \mathcal{S} \cap]0;+\infty[$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a}{2^n} \in \mathcal{S}$, puis que : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{ma}{2^n} \in \mathcal{S}$.

c) Soit x un réel fixé positif.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_n = \dfrac{a}{2^n} \left\lfloor \dfrac{2^n x}{a} \right\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
En déduire que x appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$.

6°) *Conclusion.*

Quelles sont toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient $(*)$?

Exercice 2

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$.

1°) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2°) Montrer **avec le moins de calculs possible** que f, ainsi prolongée, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x \end{array}$.

Partie 1 : Étude de f et de sa réciproque

1°) Montrer que f est bijective. On note g sa fonction réciproque.

2°) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(y)$ en fonction de $g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3°) Montrer que $g(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$.

4°) En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = x$, en déduire un développement limité de g en 0 d'ordre 3 puis un développement limité de g en 0 d'ordre 5 .

Partie 2 : Approximation de $g(1)$

On note $\alpha = g(1)$. D'après la définition de g, α est l'unique solution de l'équation $x^3 + x = 1$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$.

5°) Justifier que $\alpha \in]0, 1[$.

On définit, par récurrence, la suite (u_n) de la manière suivante :
On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse u_n et de la droite d'équation $y = 1$ (ce point existe bien car f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

6°) Construire dans un repère orthonormé le graphe sur $\mathbb{R}_+$ de f, u_0, et u_1.

7°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3 + 1}{3u_n^2 + 1}$.

Dans la suite, on pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1} \end{array}$. *Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.*

8°) Montrer que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

9°) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ'.
On fera apparaître $f'(x)$ dans l'expression de $\varphi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

10°) Montrer que φ est croissante sur $[\alpha, 1]$.

11°) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq u_n \leq 1$.

12°) Montrer que : $\forall x \in [\alpha, 1]$, $0 \leq \varphi'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.

13°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

14°) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
On note

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z(1-z) \end{array}$$

On identifiera dans l'exercice un point du plan et son affixe z.

1°) Déterminer les antécédents de -2.
Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

2°) Soit z_1 et z_2 deux complexes distincts.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z_1) = f(z_2)$.
En donner une interprétation géométrique.

3°) Justifier que f est surjective.
Y a-t-il des complexes admettant un seul antécédent par f ? Si oui, le(s)quel(s) ?

4°) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

5°) **a)** Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{1}{2} + e^{i\theta}\right)$.

b) En déduire que $f(\Gamma) = \Gamma'$ où Γ est le cercle de centre d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon 1 et Γ' est un cercle que l'on caractérisera.

$*****$ FIN $*****$