Correction du devoir surveillé 4.

Exercice 1

1°)

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

Or on sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o(u^2)$.

Ici, en posant $u = x+\frac{x^2}{2}$, on a bien $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et un $o(u^2)$ est un $o(x^2)$. D'où :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^2)\right)$$

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-x+x^2\left(-\frac{1}{2}+1\right)+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-x+x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+o(x^2)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+o(x^2)}$$

2°)

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \end{aligned}$$

On pose : $X \underset{x\to 0}{=} 2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

$X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et un $o(X)$ est un $o(x)$ donc un $o(X^3)$ est un $o(x^3)$.

On développe $\ln(1+X)$ à l'ordre 3 en 0 : $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{=} X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} 2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{1}{2}\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3}\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 2x+x^2\left(\frac{1}{2}-2\right)+x^3\left(-\frac{1}{6}-1+\frac{8}{3}\right)+o(x^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)}$$

3°)

$$\frac{\mathrm{ch}(x)-\cos(x)}{\ln(1+x)-x} \underset{x\to0}{=} \frac{1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-x} \underset{x\to0}{=} \frac{x^2+o(x^2)}{-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$\underset{x\to0}{=} \frac{x^2\,(1+o(1))}{x^2\left(-\dfrac{1}{2}+o(1)\right)} \underset{x\to0}{=} \frac{1+o(1)}{-\dfrac{1}{2}+o(1)}$$

donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{ch}(x)-\cos(x)}{\ln(1+x)-x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = -2}$

Exercice 2

Partie 1 : Étude asymptotique de 3 suites

1°) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $H_n : x_n\in\mathbb{N}^*, y_n\in\mathbb{N}, (x_n,y_n)\in\mathcal{C}$.

★ $x_0=1$, $y_0=1$. $x_0^2-2y_0^2=1$.
Donc H_0 est vraie.

★ Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.
x_n et y_n sont des entiers naturels donc, par somme et produit, $3x_n+4y_n$ et $2x_n+3y_n$ sont dans $\mathbb{N}$. De plus, $3x_n\geq3$ et $4y_n\geq0$ donc $x_{n+1}>0$. Ainsi, $x_{n+1}\in\mathbb{N}^*$.
De plus,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2-2y_{n+1}^2 &= (3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2 \\ &= 9x_n^2+24x_ny_n+16y_n^2-2(4x_n^2+12x_ny_n+9y_n^2) \\ &= x_n^2-2y_n^2 \\ &= 1 \qquad \text{par } H_n \end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, x_n\in\mathbb{N}^*, y_n\in\mathbb{N}, (x_n,y_n)\in\mathcal{C}}$.

2°) Soit $n\in\mathbb{N}$. $x_n>0$ et $y_n\geq0$ par la question précédente donc
$x_{n+1}-x_n=2x_n+4y_n>0$ et $y_{n+1}-y_n=2x_n+y_n>0$.
Ainsi $\boxed{\text{les suites } (x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont strictement croissantes}}$.

3°) a) (x_n) est croissante donc, par le théorème de la limite monotone, (x_n) converge ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par l'absurde, supposons que (x_n) converge vers un réel ℓ.
Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*, x_n\geq1$, par passage à la limite $\ell\geq1$.
$\forall n\in\mathbb{N}^*, x_{n+1}=3x_n+4y_n$ donc $y_n=\dfrac{1}{4}(x_{n+1}-3x_n)$.
Par opérations sur les limites, (y_n) converge vers $\dfrac{1}{4}(\ell-3\ell)=-\dfrac{\ell}{2}<0$.
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}, y_n\geq0$ donc, par passage à la limite, $-\dfrac{\ell}{2}\geq0$: exclu.
On en déduit que $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

b) $\forall n\geq1, y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$. $y_{n-1}\geq0$ donc $y_n\geq2x_{n-1}$.
Or $x_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit donc que $\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

4°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$x_{n+1} - y_{n+1} = (4x_n + 4y_n) - (2x_n + 3y_n) = x_n + y_n > 0$. Donc $x_{n+1} > y_{n+1}$.

De plus, $x_0 > y_0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > y_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : y_n \geq n$.

★ $y_0 = 0 \geq 0$. Donc H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.
Par H_n, $y_n \geq n$.
Or la suite y est strictement croissante donc $y_{n+1} > y_n$. Ainsi, $y_{n+1} > n$.
Les nombres y_{n+1} et n sont des entiers donc $y_{n+1} \geq n + 1$.
Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, y_n \geq n$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x_n > y_n \geq n}$.

b) $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, y_n \geq n$. Donc $\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq y_n$ donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

5°) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*, y_n \geq n$. Ainsi, $y_n > 0$. Donc, $\boxed{\text{la suite } (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ existe}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $r_n - \sqrt{2} = \dfrac{x_n}{y_n} - \sqrt{2} = \dfrac{x_n - y_n\sqrt{2}}{y_n}$.

On sait, par 1, que $(x_n, y_n) \in \mathcal{C}$ donc $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$.

$$r_n - \sqrt{2} = \frac{(x_n - y_n\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2})}{y_n(x_n + y_n\sqrt{2})} = \frac{x_n^2 - 2y_n^2}{y_n(x_n + y_n\sqrt{2})} = \frac{1}{y_n(x_n + y_n\sqrt{2})}$$

Ainsi, $r_n - \sqrt{2} \geq 0$ puisque $x_n > 0, y_n > 0$.

$x_n > y_n \geq n$ donc $x_n + y_n\sqrt{2} \geq n(1 + \sqrt{2})$ et $y_n \geq n$.

En multipliant les 2 inégalités précédentes, qui sont toutes à termes positifs, il vient :

$y_n(x_n + y_n\sqrt{2}) \geq (1 + \sqrt{2})n^2$.

$\sqrt{2} \geq 1$ donc $(1 + \sqrt{2})n^2 \geq 2n^2$. Ainsi, $y_n(x_n + y_n\sqrt{2}) \geq 2n^2$.

Les termes sont strictement positifs donc, en passant à l'inverse, $\dfrac{1}{y_n(x_n + y_n\sqrt{2})} \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq r_n - \sqrt{2} \leq \dfrac{1}{2n^2}}$.

Comme $\dfrac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, que :

$\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ converge vers } \sqrt{2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $0 \leq r_n - \sqrt{2} \leq \dfrac{1}{2n^2}$, pour que r_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près, <u>il suffit</u> que $\dfrac{1}{2n^2} \leq 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-2} &\iff 2n^2 \geq 100 \\ &\iff n^2 \geq 50 \\ &\iff n \geq 8 \qquad \text{car } 7^2 = 49 \text{ et } 8^2 = 64 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{r_8 = \dfrac{x_8}{y_8} \text{ est une valeur approchée de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

Partie 2 : Expression des suites (x_n) et (y_n)

6°) *Méthode 1 :*

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : (3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$.

★ $x_0 + y_0\sqrt{2} = 1 = (3+2\sqrt{2})^0$. Donc H_0 est vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
(3+2\sqrt{2})^{n+1} &= (3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2}) \\
&= (x_n + y_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \qquad \text{par } H_n \\
&= 3x_n + 2\sqrt{2}x_n + 3\sqrt{2}y_n + 4y_n \\
&= 3x_n + 4y_n + \sqrt{2}(2x_n + 3y_n) \\
&= x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1} \qquad \text{par définition des suites } x \text{ et } y
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

★ On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}}$.

b) $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9 - 4 \times 2 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n = 1$.
Donc, $(3-2\sqrt{2})^n = \dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^n}$ puisque $3+2\sqrt{2} \neq 0$.
Ainsi, par 6a, $(3-2\sqrt{2})^n = \dfrac{1}{x_n + y_n\sqrt{2}}$ d'où $(3-2\sqrt{2})^n = \dfrac{x_n - y_n\sqrt{2}}{x_n^2 - 2y_n^2}$ par la méthode de la quantité conjuguée.
Or $(x_n, y_n) \in \mathcal{C}$ donc $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$.
Finalement, $\boxed{(3-2\sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par 6a et 6b, $\begin{cases} (3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2} & L_1 \\ (3-2\sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2} & L_2 \end{cases}$.

En effectuant $\dfrac{L_1 + L_2}{2}$, on obtient : $\boxed{x_n = \dfrac{1}{2}\left((3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\right)}$.

En effectuant $\dfrac{L_1 - L_2}{2\sqrt{2}}$, on obtient : $\boxed{y_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right)}$.

7°) *Méthode 2 :*

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4y_{n+1}$ en revenant à la définition de la suite x.
Or $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ donc $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 8x_n + 12y_n$.
Or $y_n = \dfrac{1}{4}(x_{n+1} - 3x_n)$ par définition.
Donc, $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 8x_n + 3x_{n+1} - 9x_n$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n}$.

b) La suite (x_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 6r + 1 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 6^2 - 4 = 32 = 16 \times 2 = (4\sqrt{2})^2 > 0$.
Il y a deux solutions réelles : $\dfrac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$ et $3-2\sqrt{2}$.
Ainsi, $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ en notant $\begin{cases} r_1 = 3-2\sqrt{2} \\ r_2 = 3+2\sqrt{2} \end{cases}$.
Or $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$. D'où $x_1 = 3x_0 + 4y_0 = 3$.

On en déduit que : $\begin{cases} \lambda+\mu=1 & L_1 \\ \lambda r_1+\mu r_2=3 & L_2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda+\mu=1 & \\ \mu(r_2-r_1)=3-r_1 & L_2 \leftarrow L_2-r_1L_1 \end{cases}$.

Or $r_2-r_1=4\sqrt{2}$ et $3-r_1=2\sqrt{2}$ donc $\begin{cases} \lambda=1-\mu=\dfrac{1}{2} \\ \mu=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, x_n=\frac{1}{2}\left((3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n\right)}$.

$\forall n\in\mathbb{N}, y_n=\dfrac{1}{4}(x_{n+1}-3x_n)$.

Donc, $y_n=\dfrac{1}{8}\left(r_1^{n+1}+r_2^{n+1}-3r_1^n-3r_2^n\right)=\dfrac{1}{8}\left(r_1^n(r_1-3)+r_2^n(r_2-3)\right)$.

Ainsi, $y_n=\dfrac{1}{8}\left(-2\sqrt{2}r_1^n+2\sqrt{2}r_2^n\right)$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, y_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left((3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\right)}$.

Remarque : $\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ donc on retrouve bien le même résultat que dans une question précédente.

Partie 3 : Un problème de carré parfait

8°) Pour $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=p^2 \iff \frac{n(n+1)}{2}=p^2$.

Or,

$$\begin{aligned}(2n+1,2p)\in\mathcal{C} &\iff (2n+1)^2-2(2p)^2=1\\ &\iff 4n^2+4n+1-8p^2=1\\ &\iff 4n^2+4n=8p^2\\ &\iff \frac{n(n+1)}{2}=p^2\end{aligned}$$

$\boxed{\text{un couple } (n,p) \text{ vérifie la condition } (*) \text{ si et seulement si } (2n+1,2p) \text{ appartient à la courbe } \mathcal{C}}$.

9°) a) Soit $N\in\mathbb{N}$. Pour montrer que N et N^2 ont même parité, il suffit de montrer que :
- Si N est pair alors N^2 est pair
- Si N est impair alors N^2 est impair

On suppose que N est pair. Alors, N s'écrit : $N=2k$ où $k\in\mathbb{N}$. Ainsi, $N^2=4k^2=2\times 2k^2$ et $2k^2\in\mathbb{N}$ donc N^2 est pair.

On suppose que N est impair. Alors, N s'écrit : $N=2k+1$ où $k\in\mathbb{N}$.
Ainsi, $N^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ et $2k^2+2k\in\mathbb{N}$ donc N^2 est impair.

$\boxed{N \text{ et } N^2 \text{ ont même parité}}$.

b) Soit $(x,y)\in\mathbb{N}^2$. On suppose que $(x,y)\in\mathcal{C}$. Montrons que x est impair et y est pair.
$(x,y)\in\mathcal{C}$ donc $x^2-2y^2=1$. Ainsi, $x^2=2y^2+1$. Comme $y^2\in\mathbb{N}$, x^2 est impair.
Or x et x^2 ont même parité donc x est impair.
On en déduit que x s'écrit $x=2n+1$ où $n\in\mathbb{N}$.
$x^2-2y^2=1$ donc $(2n+1)^2-2y^2=1$ i.e. $4n^2+4n+1-2y^2=1$. Ce qui s'écrit $y^2=2n^2+2n=2(n^2+n)$.
Or $n^2+n\in\mathbb{N}$ donc y^2 est pair. Ainsi, y est pair.

$\boxed{\text{Si un point de coordonnées } (x,y)\in\mathbb{N}^2 \text{ est sur } \mathcal{C} \text{ alors nécessairement } x \text{ est impair et } y \text{ est pair.}}$

10°) On a montré dans 1 que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{N}, y_n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in \mathcal{C}$.
Par la question précédente, on en déduit que x_n est impair et y_n est pair.
On en déduit par 8 que $\left(\dfrac{x_n - 1}{2}, \dfrac{y_n}{2}\right)$ vérifie la condition $(*)$.
Or, par 2, (x_n) est strictement croissante donc les entiers x_n sont tous distincts 2 à 2. Donc aussi les réels $\dfrac{x_n - 1}{2}$. Ainsi, il y a une infinité de couples vérifiant la condition $(*)$.
On a donc bien montré que :
$\boxed{\text{il existe une infinité d'entiers naturels } n \text{ tels que la somme } 0+1+2+\cdots+n \text{ soit un carré parfait}}$.

Partie 4 : Un calcul de partie entière

11°) Soit $X \in \mathbb{R}$ tel que $X \notin \mathbb{Z}$.
Alors, $\lfloor X \rfloor < X < \lfloor X \rfloor + 1$ donc $-\lfloor X \rfloor - 1 < -X < -\lfloor X \rfloor$.
Comme $-\lfloor X \rfloor - 1$ et $-\lfloor X \rfloor$ sont des entiers consécutifs, on en déduit que $\boxed{\lfloor -X \rfloor = -\lfloor X \rfloor - 1}$.

12°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $y_n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ alors, comme $y_n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ceci est exclu.
Donc $y_n\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Ainsi, par la question précédente, $\boxed{\left\lfloor -y_n\sqrt{2} \right\rfloor = -\left\lfloor y_n\sqrt{2} \right\rfloor - 1}$.

13°) a) $8 < 9$ donc $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} < \sqrt{9} = 3$ donc $3 - 2\sqrt{2} > 0$.
De plus, $3 - 2\sqrt{2} < 1 \iff 2 < 2\sqrt{2} \iff 1 < \sqrt{2}$.
Or on a bien $1 < \sqrt{2}$ donc $3 - 2\sqrt{2} < 1$. On en déduit que $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$.
D'où également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < (3 - 2\sqrt{2})^n < 1$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \left\lfloor (3 - 2\sqrt{2})^n \right\rfloor = 0}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la fonction partie entière aux égalités des questions 6a et 6b, comme x_n est un entier, cela donne les deux relations suivantes :

$$\left\lfloor (3+2\sqrt{2})^n \right\rfloor = x_n + \left\lfloor y_n\sqrt{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \left\lfloor (3-2\sqrt{2})^n \right\rfloor = x_n + \left\lfloor -y_n\sqrt{2} \right\rfloor.$$

À l'aide de la question 13a puis de la question 12, la deuxième relation donne :
$x_n = -\left\lfloor -y_n\sqrt{2} \right\rfloor = \left\lfloor y_n\sqrt{2} \right\rfloor + 1$.
D'où, en injectant dans la première relation, $\left\lfloor (3+2\sqrt{2})^n \right\rfloor = 2\left\lfloor y_n\sqrt{2} \right\rfloor + 1$.
Comme $\left\lfloor y_n\sqrt{2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\boxed{(3+2\sqrt{2})^n \text{ est un entier impair}}$.

Exercice 3

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
On a $0^n = 0$ donc $\boxed{f_n(0) = -1 < 0}$.
$f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1$. Or on sait que $0 < e < 3$ donc $\dfrac{3}{e} > 1$ donc $\boxed{f_n(1) > 0}$.

2°) • f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par somme, produit et composition de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = 3(nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2}) = 3x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2)$$

exp est strictement positive et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n-1} \geq 0$, $x^{n-1} = 0 \iff x = 0$.

$$n - 2x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \frac{n}{2} \qquad\qquad n - 2x^2 = 0 \iff x = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \text{car } x \geq 0$$

$$\iff x \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \text{car } x \geq 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant (on a bien $1 \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$ car $n \geq 2$) :

x	0		1		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f_n	-1	$\nearrow$	$3e^{-1} - 1 > 0$	$\nearrow$		$\searrow$	-1

- Justification de la limite en $+\infty$:
  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = 3\dfrac{x^n}{e^{x^2}} - 1$. Or $e^x \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{x^2})$ donc $\dfrac{x^n}{e^{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{x^n}{e^x}\right)$.
  Comme $\dfrac{x^n}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{x^2}} = 0$.
  Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -1}$.

3°) - Appliquons le théorème de la bijection sur $[0, 1]$:
  - ★ $[0, 1]$ est un intervalle
  - ★ f_n est continue sur $[0, 1]$
  - ★ f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$

  Donc, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$ i.e. de $[0, 1]$ dans $[-1, 3e^{-1} - 1]$.
  Comme $f_n(1) = 3e^{-1} - 1 > 0$ (c.f. question 1), on a $0 \in [-1, 3e^{-1} - 1]$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent u_n dans $[0, 1]$. Donc, sur $[0, 1]$, f_n s'annule en un unique réel u_n.
  Comme, de plus, $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$, il vient $0 < u_n < 1$.
- $f_n(1) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $\left[1, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$ donc f_n est strictement positive sur cet intervalle : elle ne s'y annule pas. On obtient au passage que $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$.
- Par un raisonnement analogue au premier point, on démontre que f_n réalise une bijection de $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ dans $\left]-1, f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$.
  Comme $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$, on a $0 \in \left]-1, f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$. Ainsi 0 admet un unique antécédent v_n dans $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$ i.e. sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty\right[$, f_n s'annule en un unique réel v_n. De plus, $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) > 0$ donc $v_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

> Il existe donc exactement deux réels positifs u_n et v_n tels que $f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0$.
> De plus, $0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\dfrac{n}{2}} < v_n$.

4°) $\forall n \geq 2,\ v_n \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2}} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

5°) a) Soit $n \geq 2$. Par définition de u_n, on a : $f_n(u_n) = 0$ i.e. $3u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0$.

Puisque $u_n > 0$, on en tire : $\boxed{e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}}$.

b) Soit $n \geq 2$. $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = 3u_n^{n+1}\dfrac{1}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1$

Comme $u_n < 1$, il vient : $\boxed{f_{n+1}(u_n) < 0}$.

c) Soit $n \geq 2$.

$f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$ et u_n et u_{n+1} sont des éléments de $[0,1]$, on en déduit : $u_n < u_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement croissante}}$.

d) La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée (par la constante 1), donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.
Notons ℓ sa limite ; comme $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante, pour tout $n \geq 2$, $u_2 \leq u_n < 1$.
Par passage à la limite : $u_2 \leq \ell \leq 1$. Comme $u_2 > 0$, on a bien $\boxed{0 < \ell \leq 1}$.

6°) a) Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
& 3u_n^n e^{-u_n^2} = 1 \\
\text{donc} \quad & \ln\left(3u_n^n e^{-u_n^2}\right) = \ln(1) \\
& \ln(3) + n\ln(u_n) - u_n^2 = 0 \qquad \text{car } u_n > 0 \\
\text{d'où} \quad & \boxed{n\ln(u_n) = u_n^2 - \ln(3)}
\end{aligned}$$

b) *Méthode 1* :

$\forall n \geq 2, \ln(u_n) = \dfrac{u_n^2 - \ln(3)}{n}$.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc, par opérations, $\dfrac{u_n^2 - \ln(3)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

Méthode 2 : On raisonne par l'absurde : on suppose $\ell \in]0,1[$.
Par continuité de ln en ℓ, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln \ell < 0$ car $\ell \in]0,1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln u_n = -\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n^2 - \ln 3) = \ell^2 - \ln 3 \in \mathbb{R}$.
Il y a donc contradiction de l'unicité de la limite.
On en déduit que $\boxed{\ell = 1}$.

c) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $u_n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui signifie : $u_n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

D'où $\dfrac{u_n^2 - \ln 3}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1 + o(1) - \ln 3}{n}$ donc $\boxed{\dfrac{u_n^2 - \ln 3}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1 - \ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

d) Pour tout $n \geq 2$, l'égalité $n\ln u_n = u_n^2 - \ln 3$ donne $\ln(u_n) = \dfrac{u_n^2 - \ln 3}{n}$ d'où

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(\frac{u_n^2 - \ln 3}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1 - \ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$ et, en posant $u = \dfrac{1 - \ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on a bien $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et un $o(u)$ est un $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1 - \ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $\boxed{\alpha = 1 - \ln 3}$ convient.