Devoir surveillé 4.

Samedi 13 janvier 2024, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

1°) Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2+2x+2}$.

2°) Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(\exp(x) + \operatorname{Arctan}(x))$.

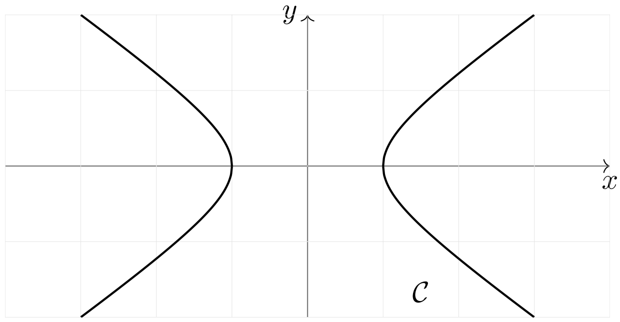
3°) À l'aide d'un développement limité, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{\ln(1+x) - x}$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - 2y^2 = 1\}$$

$\mathcal{C}$ est une hyperbole. Pour information, voici un aperçu de l'ensemble :



Même si une partie n'est pas traitée ou seulement partiellement traitée, on pourra utiliser les résultats de cette partie pour répondre aux questions d'une partie suivante.

Partie 1 : Étude asymptotique de 3 suites

On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{N}^*, y_n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in \mathcal{C}$.

2°) Justifier que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.

3°) **a)** Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) En déduire que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4°) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n > y_n \geq n$.

b) Retrouver alors les limites de (x_n) et (y_n).

5°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, r_n = \dfrac{x_n}{y_n}$.

a) Justifier que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ existe.

b) En utilisant le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in \mathcal{C}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq r_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2n^2}$$

Qu'en déduit-on sur la suite (r_n) ?

c) Déterminer une valeur de n telle que $r_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

Partie 2 : Expression des suites (x_n) et (y_n)

Nous allons ici trouver une expression de x_n et y_n par 2 méthodes indépendantes.

6°) *Méthode 1 :*

a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3+2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$

b) Développer $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$.
En déduire, directement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3-2\sqrt{2})^n = x_n - y_n\sqrt{2}$$

c) En déduire les expressions de x_n et y_n pour $n \in \mathbb{N}$.

7°) *Méthode 2 :*

a) En revenant à la définition des suites (x_n) et (y_n), exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+2} en fonction de x_{n+1} et x_n.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire à nouveau x_n puis en déduire y_n.

Partie 3 : Un problème de carré parfait

On souhaite prouver dans cette partie qu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que la somme $0+1+2+\cdots+n$ soit un carré parfait, autrement dit une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ (*) : \sum_{k=0}^{n} k = p^2$$

8°) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer qu'un couple (n,p) vérifie la condition $(*)$ si et seulement si le point de coordonnées $(2n+1, 2p)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$.
Ainsi, le problème posé revient à prouver l'existence d'une infinité de points de $\mathcal{C}$ dont les coordonnées sont entières et positives, l'abscisse étant impaire et l'ordonnée paire.

9°) **a)** Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que N et N^2 ont même parité.

b) Montrer que, si un point de coordonnées $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ est sur $\mathcal{C}$ alors nécessairement x est impair et y est pair.

10°) En utilisant un résultat d'une partie précédente, obtenir le résultat voulu.

Partie 4 : Un calcul de partie entière

11°) Montrer que si X est un réel qui n'est pas un entier alors $\lfloor -X \rfloor = -\lfloor X \rfloor - 1$.

12°) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor -y_n\sqrt{2} \rfloor$ en fonction de $\lfloor y_n\sqrt{2} \rfloor$.

13°) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor (3-2\sqrt{2})^n \rfloor = 0$.

b) En appliquant la partie entière aux égalités des questions 6a et 6b, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor (3+2\sqrt{2})^n \rfloor$ est un entier impair.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1.$$

1°) Déterminer le signe de $f_n(0)$ et le signe de $f_n(1)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, fixé.

Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$; on ne cherchera pas à calculer $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)$, mais on calculera la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et on placera 1 et $f_n(1)$ dans le tableau de variation.

3°) Justifier que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en exactement deux réels notés u_n et v_n , qui vérifient : $0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\dfrac{n}{2}} < v_n$.

4°) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

5°) **a)** Calculer, pour tout $n \geq 2$, $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \geq 2$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. Soit ℓ sa limite.
Justifier que $0 < \ell \leq 1$.

6°) **a)** Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $n \ln(u_n) = u_n^2 - \ln 3$.

b) En déduire que $\ell = 1$.

c) Déduire de la question précédente que : $\dfrac{u_n^2 - \ln 3}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1 - \ln 3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, u_n en fonction de $\dfrac{u_n^2 - \ln 3}{n}$, puis déterminer un réel α tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$