# Devoir surveillé 3.

*Samedi 25 novembre 2023, de 7h45 à 11h45.*

**L'usage de calculatrices est interdit**

*La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'* $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
*Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.*

## Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes. On prendra bien soin de simplifier les résultats obtenus.

**1°)** $I = \displaystyle\int_1^2 x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x.$

**2°)** $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin(x)}} \mathrm{d}x$. On posera $t = \sin(x)$.

## Exercice 2

On pose $a = e^{i\frac{\pi}{5}}$.

**1°)** Justifier l'égalité : $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 = 0$.

**2°)** Justifier l'égalité : $1 - (a + \overline{a}) + (a^2 + \overline{a}^2) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$.

**3°)** En déduire la valeur de $1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

**4°)** Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation : $4X^2 - 2X - 1 = 0$.

**5°)** En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

## Exercice 3

On note $n$ un entier naturel non nul.

**1°)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ : $z^n + 1 = 0$.

**2°)** **a)** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p z^p$$

où pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$, $a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)}$.

**b)** Calculer, pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$, la valeur de $a_p$ ; on montrera que $a_p = 0$ sauf pour deux valeurs de $p$ à déterminer.

**c)** En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1).$$

**3°)** **a)** Factoriser, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

**b)** À l'aide du résultat de la question 2c et d'une solution particulière bien choisie de $(E)$, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0.$$

# Exercice 4

On souhaite dans cet exercice montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, et on souhaite également calculer sa valeur.
*Les deux parties sont largement indépendantes.*

## Partie 1 : Indépendance vis-à-vis de $n$

**1°)** On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2(x)}$.

**a)** Étudier la périodicité de $f$.

**b)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

**2°)** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(px)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_0^{p\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

**3°)** À l'aide des résultats de 1.b et de 2, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

*Ainsi, on a obtenu l'indépendance de la valeur de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x$ *par rapport à* $n \in \mathbb{N}^*$.

## Partie 2 : Valeur de l'intégrale

**4°)** À l'aide des propriétés de la fonction $f$, prouver l'égalité :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

**5°)** On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.
Pourquoi le changement de variables $t = \tan x$ pose-t-il un problème ?

**6°)** On pose, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$F(b) = \int_0^{b} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Quelles sont les propriétés de $F$ ?

En déduire que : $I = \displaystyle\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^{b} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

**7°)** Soit $a > 0$. Calculer $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**8°)** Soit $b \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ fixé.

En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, montrer que $\displaystyle\int_0^{b} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \varphi(\tan(b))$.

**9°)** En déduire la valeur de $I$ puis de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(nx)}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

## Exercice 5

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $(E_p)$ l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$(E_p)\ :\ pz^p = z^{p-1} + \cdots + z + 1 \quad \text{i.e.} \quad pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k.$$

**1°)** *Des exemples*

**a)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner une solution évidente de $(E_p)$.

**b)** Résoudre $(E_2)$ : $2z^2 = z + 1$.

**c)** Résoudre $(E_3)$ : $3z^3 = z^2 + z + 1$.

Dans la suite, $p$ désigne un entier naturel non nul, supérieur ou égal à 2.

**2°)** *Un résultat utile pour la suite*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}}$ soit réel.

**a)** Montrer qu'il existe un entier $n$ tel que $\theta = \dfrac{2n\pi}{p+1}$.

**b)** En déduire que $\sin\left(\dfrac{p\theta}{2}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

**3°)** *Un résultat sur le module des solutions*

Soit $z$ une solution de $(E_p)$ de module 1, et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On suppose dans cette question que cette solution est distincte de 1.

**a)** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z^k$.

**b)** En déduire l'égalité :

$$e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\left(\dfrac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}.$$

**c)** Que peut-on en déduire ?

**4°)** *Un autre résultat sur le module des solutions*

Montrer qu'il n'existe pas de solution de $(E_p)$ de module strictement supérieur à 1.

$\ast\ast\ast\ast\ast$ FIN $\ast\ast\ast\ast\ast$