Correction du devoir surveillé 2.

Exercice 1

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Factorisons $\sin(x) + \sin(3x)$:

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(3x) &= \sin(2x - x) + \sin(2x + x)\\ &= \sin(2x)\cos(x) - \sin(x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)\\ &= 2\sin(2x)\cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin x - \sqrt{3}\sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\iff 2\sin(2x)\cos(x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 0\\ &\iff \sin(2x)(2\cos(x) - \sqrt{3}) = 0\\ &\iff \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = k\pi \text{ ou } \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0 &\iff 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0\\ &\iff 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0\\ &\iff 2X^2 - X - 1 = 0 \text{ en posant } X = \sin x\end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1+8 = 9$ donc les racines sont $\frac{1+3}{4} = 1$ et $\frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0 &\iff \sin(x) = 1 \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{2}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2})\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + \sin(2x) = \sqrt{2} \\
&\iff \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin(2x) = \sqrt{2} \\
&\iff -\cos(2x) + \sqrt{2} + \sin(2x) = \sqrt{2} \\
&\iff \cos(2x) = \sin(2x) \\
&\iff \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \text{ ou } \underbrace{2x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{exclu}} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 2

1°) $\boxed{\text{Cet énoncé est vrai}}$.
En effet : soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $a = 0, b = 0, c = \sin x$. Alors, $\sin x = ax^2 + bx + c$.

2°) $\boxed{\text{Cet énoncé est faux}}$.
En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que l'énoncé est vrai.
On suppose ainsi : $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \sin x = ax^2 + bx + c$.
a, b, c sont ici indépendants de x.
$x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont 3 fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et en dérivant l'égalité 3 fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'''(x) = 0 \qquad \text{i.e.} -\cos(x) = 0$$

Ceci est bien sûr exclu : la fonction cos n'est pas la fonction nulle.
Donc l'énoncé est faux.

3°) $\boxed{\text{Cet énoncé est vrai}}$.
En effet : soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. Donc $a = 2, b = 0, c = -1$ conviennent.

4°) $\boxed{\text{Cet énoncé est faux}}$.
En effet, prouvons sa négation i.e. $\exists x \in \mathbb{R}, \cos^2 x > \cos x$.
On pose : $x = \pi$. Alors $\cos(x) = -1$ et $\cos^2(x) = 1$ donc on a bien $\cos^2 x > \cos x$.

Exercice 3

1°) $\underbrace{0 \le n \le n}_{\text{1ere inégalité}}$, $\underbrace{0 \le n-1 \le n}_{\text{2eme inégalité}}$, $\dots, \underbrace{0 \le n-k+1 = n-(k-1) \le n}_{k-1+1=k \text{ eme inégalité}}$.
En multipliant membre à membre ces k inégalités à termes positifs, on obtient :
$\boxed{0 \le n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \le n^k}$.
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1)$.
$k \ge 2$ donc $k! = k(k-1)(k-2)!$.
$(k-2)! \ge 1$ et $k(k-1) \ge 0$ donc $k! \ge k(k-1)$.

Comme les termes sont strictement positifs, $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

Or $0 \leq n(n-1)\dots(n-k+1) \leq n^k$ et $0 \leq \dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$ donc, en multipliant membre à membre ces inégalités : $0 \leq \dfrac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1) \leq \dfrac{n^k}{k(k-1)}$.

Finalement, $\boxed{\dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k(k-1)}}$.

2°) a) Soient a et b deux réels. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} = \frac{a(k-1)+bk}{k(k-1)} = \frac{(a+b)k-a}{k(k-1)}$$

Pour que a et b conviennent, il suffit que : $\begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases}$, i.e. que $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$.

(*Autre méthode* : Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$)

Ainsi, $\boxed{\text{en posant } a=1 \text{ et } b=-1}$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \text{ (somme télescopique)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}}$$

3°) D'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\ &\leq 1 + n\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{n^k}{k(k-1)}\frac{1}{n^k} \qquad \text{(par 1, et car } \frac{1}{n^k} \geq 0 \text{ pour tout } k) \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &\leq 2 + 1 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$\boxed{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq 3}$.

4°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: H_n : $\dfrac{n^n}{n!} \leq 2 \times 3^{n-2}$.

- Pour $n = 2$:
  $\dfrac{2^2}{2!} = \dfrac{4}{2} = 2 = 2.3^0$, donc H_2 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons H_n vraie.
  Montrons que H_{n+1} est vraie i.e. $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 2 \times 3^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+1) \times n!} \\
&= \frac{(n+1)^n}{n!} \\
&= \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \frac{n^n}{n!} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\leq \frac{n^n}{n!} 3 \text{ par la question précédente et car } \frac{n^n}{n!} \geq 0 \\
&\leq 2 \times 3^{n-2} \times 3 \text{ par } H_n \\
&\leq 2 \times 3^{n-1}
\end{aligned}$$

  Ainsi H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ \dfrac{n^n}{n!} \leq 2 \times 3^{n-2}.}$

Exercice 4

Partie 1 : Première méthode

1°) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x.2x - (x^2-1).2}{(2x)^2} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{(2x)^2} \frac{1}{\dfrac{(2x)^2 + (x^2-1)^2}{(2x)^2}} \\
&= \frac{2x^2+2}{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1} \\
&= \frac{2(x^2+1)}{x^4 + 2x^2 + 1} \\
&= \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^2+1}}$$

2°) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2\operatorname{Arctan}'(x)$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(f - 2\operatorname{Arctan})'(x) = 0$.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $f - 2\operatorname{Arctan}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$\exists\, C_1 \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - 2\operatorname{Arctan}(x) = C_1$.
En particulier, $f(1) - 2\operatorname{Arctan}(1) = C_1$ i.e. $C_1 = \operatorname{Arctan}(0) - 2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $(f - 2\operatorname{Arctan})'(x) = 0$, et comme $\mathbb{R}_-^*$ est un intervalle :
$\exists\, C_2 \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) - 2\operatorname{Arctan}(x) = C_2$.
En particulier, $f(-1) - 2\operatorname{Arctan}(-1) = C_2$ i.e. $C_2 = \operatorname{Arctan}(0) - 2\frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, $\boxed{\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 2\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$.

3°) Calculons la limite de f en $+\infty$ à l'aide de l'expression de l'énoncé :
$\frac{x^2-1}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $\operatorname{Arctan}(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, donc par composition de limites, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}}$.
Calculons la limite de f en $+\infty$ à l'aide de l'expression de la question précédente, sur $\mathbb{R}_+^*$:
$f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{Le résultat est cohérent}}$.
Calculons la limite de f en $-\infty$ à l'aide de l'expression de l'énoncé :
$\frac{x^2-1}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, et $\operatorname{Arctan}(X) \underset{X\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$, donc par composition de limites, $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}}$.
Calculons la limite de f en $-\infty$ à l'aide de l'expression de la question précédente, sur $\mathbb{R}_-^*$:
$f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{Le résultat est cohérent}}$.

Partie 2 : Deuxième méthode

4°) a) Comme tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, et que Arctan en est la réciproque, puisque $x \in \mathbb{R}$, on a, pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$x = \tan(\theta) \Longleftrightarrow \theta = \operatorname{Arctan}(x).$$

Autrement dit, il existe un unique $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta)$, et cet unique θ est $\boxed{\theta = \operatorname{Arctan}(x)}$. Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\operatorname{Arctan} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que $\boxed{\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$.

b) Calculons pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan^2(\theta)-1}{2\tan(\theta)}\right)\\
&= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\dfrac{2\tan(\theta)}{\tan^2(\theta)-1}}\right) \qquad \text{car } x \neq 1 \text{ et } x>0 \text{ donc } \tan^2(\theta)-1 = x^2-1 \neq 0\\
&= \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\dfrac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\tan(2\theta)}\right)} \text{ car Arctan est impaire}$$

c) Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $g(t) = \operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 0.$$

Comme $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont des intervalles, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe des constantes C_3 et C_4 telles que : $\forall\, t \in \mathbb{R}_-^*$, $g(t) = C_3$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t) = C_4$.

Or $g(-1) = 2\operatorname{Arctan}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $g(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}_-^*,\ \operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

d) $0 < x < 1$ et Arctan est strictement croissante donc $\operatorname{Arctan}(0) < \operatorname{Arctan}(x) < \operatorname{Arctan}(1)$ i.e. $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, $\boxed{2\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$.

Donc $\tan(2\theta) \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente, on a donc $\operatorname{Arctan}(\tan(2\theta)) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\tan(2\theta)}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(2\theta)) - \dfrac{\pi}{2}$.

Comme $2\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a même $f(x) = 2\theta - \dfrac{\pi}{2}$ i.e. $\boxed{f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}}$.

e) Comme $x > 1$ et que Arctan est strictement croissante et minorée strictement par $\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arctan}(1) < \operatorname{Arctan}(x) < \dfrac{\pi}{2}$ d'où $2\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

Donc $\tan(2\theta) \in \mathbb{R}_-^*$.

D'après la question c, $\operatorname{Arctan}(\tan(2\theta)) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\tan(2\theta)}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

donc $f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(2\theta)) + \dfrac{\pi}{2}$.

Comme tan est π-périodique, $f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(2\theta - \pi)) + \dfrac{\pi}{2}$.

Or $2\theta - \pi \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ donc on obtient : $f(x) = 2\theta - \pi + \dfrac{\pi}{2} = 2\theta - \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, on a encore $\boxed{f(x) = 2\operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}}$.

f) $f(1) = \text{Arctan}(0) = 0$, et $2\,\text{Arctan}(1) - \dfrac{\pi}{2} = 2\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

Donc, $\boxed{\text{pour } x = 1 \text{ également, } f(x) = 2\,\text{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}}$.

5°) a) ($\mathbb{R}^*$ est bien symétrique par rapport à 0).
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \text{Arctan}\left(\frac{(-x)^2 - 1}{2(-x)}\right) \\
&= \text{Arctan}\left(-\frac{x^2 - 1}{2x}\right) \\
&= -\,\text{Arctan}\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right) \quad \text{car Arctan est impaire} \\
f(-x) &= -f(x)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

b) D'après la question 4, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2\,\text{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}$.
Comme f est impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= -f(-x) \\
&= -\left(2\,\text{Arctan}(-x) - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{car } -x \in \mathbb{R}_+^* \\
&\boxed{f(x) = 2\,\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}} \quad \text{car Arctan est impaire}
\end{aligned}$$

Exercice 5

1°) a) Soit $t > 0$.
Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(1) \neq 0$, donc on peut poser $x = \dfrac{t}{f(1)}$.
On a alors $t = xf(1)$.
On a bien montré : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ t = xf(1).}$

b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit alors x un réel strictement positif tel que $t = xf(1)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
f \circ f(t) &= f \circ f\,(xf(1)) \\
&= f\,(f\,(xf(1))) \\
&= f\,(1f(x)) \quad \text{par la propriété } (*) \text{ appliquée au couple } (x, 1) \\
&= xf(1) \quad \text{par la propriété } (*) \text{ appliquée au couple } (1, x) \\
&\boxed{f \circ f(t) = t}
\end{aligned}$$

c) Appliquons la propriété $(*)$ avec $x = 1$ et $y = 1$: $f\,(1.f(1)) = 1.f(1)$.
Or $f\,(f(1)) = 1$ d'après la question précédente, d'où $\boxed{1 = f(1)}$.

2°) a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n : f(u^n) = u^n$.

- $u^0 = 1$ et $f(u^0) = f(1) = 1$, donc P_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que P_n vraie.

$$\begin{aligned} f(u^{n+1}) &= f(u \times u^n) \\ &= f\left(u \times f(u^n)\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= u^n f(u) \text{ d'après } (*) \text{ appliquée au couple } (u, u^n) \\ &= u^n f(xf(x)) \\ &= u^n \times xf(x) \text{ d'après } (*) \text{ appliquée au couple } (x, x) \\ &= u^n \times u = u^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc P_{n+1} est vraie.
- Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f(u^n) = u^n.}$

b) Par l'absurde, supposons que $u < 1$.
Comme $x > 0$ et f à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $u = xf(x) > 0$.
Ainsi, $u \in]0, 1[$. Alors $u^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or on sait que $f(X) \underset{X \to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par composition de limites, $f(u^n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
En utilisant la question précédente, cela s'écrit aussi $u^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$: absurde.
Donc $\boxed{u \geq 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la propriété $(*)$ appliquée au couple $\left(\frac{1}{u^n}, u^n\right)$:

$$\begin{aligned} u^n f\left(\frac{1}{u^n}\right) &= f\left[\frac{1}{u^n} f(u^n)\right] \\ &= f\left[\frac{1}{u^n} u^n\right] \text{ d'après la question a} \\ &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{f\left(\frac{1}{u^n}\right) = \frac{1}{u^n}}$.

d) On sait déjà que $u \geq 1$. Supposons que $u > 1$.
Alors $u^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\frac{1}{u^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or on sait que $f(X) \underset{X \to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition de limites, $f\left(\frac{1}{u^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
En utilisant la question précédente, cela s'écrit aussi $\frac{1}{u^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$: absurde.
Donc $\boxed{u = 1}$.

3°)
- D'après ce qui précède : si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifie $(*)$ et $(**)$ et si $x > 0$, alors $xf(x) = 1$, d'où $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Réciproquement la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est solution du problème : elle est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$, et pour tous $x > 0$ et $y > 0$:

$$f\left(xf(y)\right) = \frac{1}{xf(y)} = \frac{1}{x\frac{1}{y}} = \frac{y}{x} = yf(x)$$

  Donc f vérifie $(**)$.
- Conclusion : $\boxed{\text{Il y a une unique fonction } f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \text{ vérifiant } (*) \text{ et } (**) \text{ : c'est } x \mapsto \frac{1}{x}}$.