Correction du devoir surveillé 1.

Exercice 1

1°) (I_1) est définie en x si et seulement si $x \neq \dfrac{3}{2}$, donc elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$.
Soit alors $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
(I_1) &\iff \frac{x^2-4x+3}{3-2x}+x-1 \leq 0\\
&\iff \frac{x^2-4x+3+(x-1)(3-2x)}{3-2x} \leq 0\\
&\iff \frac{x^2-4x+3-2x^2+5x-3}{3-2x} \leq 0\\
&\iff \frac{-x^2+x}{3-2x} \leq 0\\
&\iff \frac{x(1-x)}{3-2x} \leq 0
\end{aligned}$$

Le signe du quotient $\dfrac{x(1-x)}{3-2x}$ est le signe du produit $x(1-x)(3-2x)$ donc il suffit de faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $3-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\frac{x(1-x)}{3-2x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est }]-\infty,0] \cup \left[1,\dfrac{3}{2}\right[}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. (I_2) est bien définie en x si et seulement si $x^2-2x \geq 0$.
Or $x^2-2x = x(x-2)$, c'est un trinôme du second degré de racines 0 et 2. Le coefficient de x^2 est positif donc $x^2-2x \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 2$.
Ainsi, (I_2) est définie sur $D =]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$.
Soit maintenant $x \in D$.

★ On suppose $x < \dfrac{3}{2}$ (alors $x \leq 0$ car $x \in D$). Alors x est solution de (I_2) car $x-\dfrac{3}{2} < 0$ et $\sqrt{x^2-2x} \geq 0$.

★ On suppose $x \geq \dfrac{3}{2}$ (alors $x \geq 2$).

$$\begin{aligned}(I_2) &\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \leq x^2-2x \qquad \text{car } \begin{cases} x-\dfrac{3}{2} \geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x} \geq 0 \end{cases} \\ &\iff x^2-3x+\frac{9}{4} \leq x^2-2x \\ &\iff \frac{9}{4} \leq x \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{9}{4} \geq 2$, on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est }]-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{9}{4}, +\infty\right[}$.

3°) (I_3) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X = \ln x$, alors $(I_3) \iff X^2+3X+2 \geq 0$.
Le trinôme du second degré X^2+3X+2 a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$. $\Delta > 0$.
Donc, il a deux racines : $\dfrac{-3-1}{2} = -2$ et $\dfrac{-3+1}{2} = -1$.
Comme le coefficient de X^2 est positif,

$$\begin{aligned}(I_3) &\iff X \leq -2 \text{ ou } X \geq -1 \\ &\iff \ln x \leq -2 \text{ ou } \ln x \geq -1 \\ &\iff x \leq e^{-2} \text{ ou } x \geq e^{-1} \qquad \text{car exp est strictement croissante}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I_3) \text{ est }]0, e^{-2}] \cup [e^{-1}, +\infty[}$.

Exercice 2

1°) Par composition et quotient de fonctions dérivables là où elles sont définies, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{a}{ax+1}\ln(bx+1) - \ln(ax+1)\dfrac{b}{bx+1}}{(\ln(bx+1))^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)(\ln(bx+1))^2}}$$

2°) Par composée et produit de fonctions dérivables là où elles sont définies, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= ab\ln(bx+1) + a(bx+1)\frac{b}{bx+1} - ba\ln(ax+1) - b(ax+1)\frac{a}{ax+1} \\ &= ab\ln(bx+1) + ab - ba\ln(ax+1) - ba \\ g'(x) &= ab\big(\ln(bx+1) - \ln(ax+1)\big)\end{aligned}$$

Comme $ab > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(bx+1) - \ln(ax+1)$.
Or $b \geq a$ donc, pour tout $x \geq 0$, $bx \geq ax$, puis $bx+1 \geq ax+1$ et $\ln(bx+1) \geq \ln(ax+1)$ par croissance de ln.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geq 0$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, on en tire que g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $g(0) = a\ln(1) - b\ln(1) = 0$, donc on a, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \geq 0}$.

3°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(ax+1)(bx+1)(\ln(bx+1))^2}$.
Le dénominateur est toujours strictement positif car si $x \geq 0$, $ax+1>0$ et $bx+1>0$, et car un carré de réel est toujours positif. Donc, comme g est aussi positive, f' est positive sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

4°) $\dfrac{1}{b}$ et $\dfrac{1}{a}$ sont des éléments de l'intervalle $]0,+\infty[$, et comme $0<a\leq b$, on a $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.
Par croissance de f sur cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{b}\right) &\leq f\left(\frac{1}{a}\right) \\ \frac{\ln(\frac{a}{b}+1)}{\ln(\frac{b}{b}+1)} &\leq \frac{\ln(\frac{a}{a}+1)}{\ln(\frac{b}{a}+1)} \\ \frac{\ln(\frac{a}{b}+1)}{\ln(2)} &\leq \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{b}{a}+1)} \end{aligned}$$

Or $\ln(2)>0$ et $\ln\left(\dfrac{b}{a}+1\right)>0$ puisque $\dfrac{b}{a}+1>1$. On en tire donc :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) \leq (\ln 2)^2}$$

Exercice 3

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= x+\ln(4)+\frac{2}{e^x+1} - x + \ln(4) + \frac{2}{e^{-x}+1} \\ &= 2\ln(4) + 2\frac{(e^{-x}+1)+(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} \\ &= 2\ln(4) + 2\frac{2+e^{-x}+e^x}{2+e^{-x}+e^x} \qquad \text{car } e^x e^{-x} = e^0 = 1 \\ &= \boxed{2\ln(4)+2} \end{aligned}$$

On en tire que $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 1+\ln 4$.
Ainsi, si on note M le point de coordonnées $(x,f(x))$ et M' le point de coordonnées $(-x,f(-x))$, le milieu du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(0,1+\ln 4)$: c'est le point A.
Cela signifie que $\boxed{\text{le point } A \text{ est un centre de symétrie pour } \mathcal{C}.}$

2°) Par somme et quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}.$$

Comme exp est positive, on constate que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\dfrac{2}{e^x+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Comme $\dfrac{2}{e^x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

3°) • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x + \ln 4 + 2) = \dfrac{2}{e^x + 1} - 2$ donc $f(x) - (x + \ln 4 + 2) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\boxed{\text{la droite } D_1 \text{ d'équation } y = x + \ln 4 + 2 \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } -\infty.}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x + \ln 4 + 2) = \dfrac{2 - 2(e^x + 1)}{e^x + 1} = \dfrac{-2e^x}{e^x + 1} < 0$.

Donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est toujours en dessous de } D_1.}$

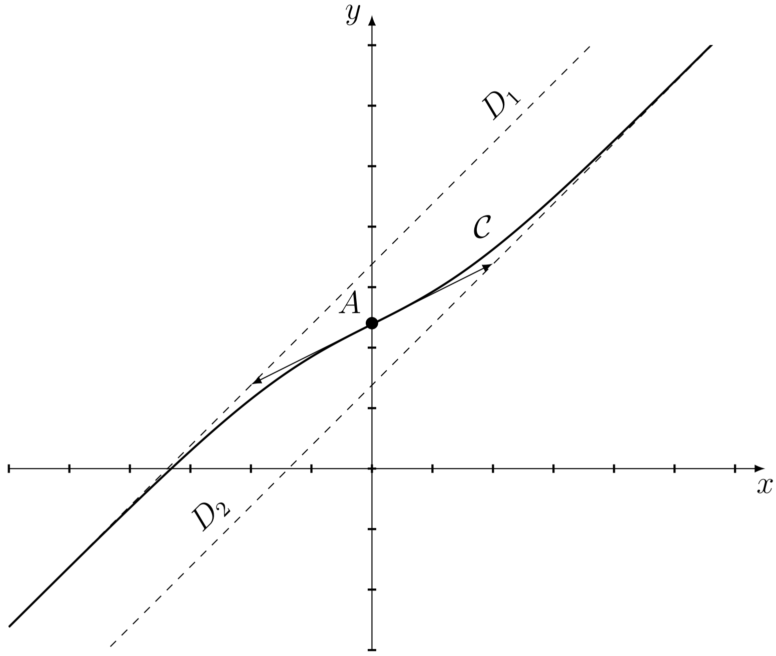
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x + \ln 4) = \dfrac{2}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x + \ln 4) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $\boxed{\text{la droite } D_2 \text{ d'équation } y = x + \ln 4 \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty.}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x + \ln 4) = \dfrac{2}{e^x + 1} > 0$.

Donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est toujours au dessus de } D_2.}$

4°) On a $f'(0) = \frac{1}{2}$ ce qui permet d'avoir la pente de la tangente en A.



<u>Problème</u>

Partie 1 : Étude des fonctions c et s

1°) $\mathbb{R}$ est centré en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$c(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = c(x)$$
$$s(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{-e^{-x} + e^x}{2} = -s(x)$$

$\boxed{c \text{ est paire et } s \text{ est impaire.}}$

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$, $c(x) - s(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$ car $\exp > 0$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ c(x) > s(x)}$.

3°) a) $\boxed{c \text{ et } s \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}}$ comme combinaisons linéaires et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $c'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = s(x)$ $\qquad s'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = c(x)$.

Ainsi, $\boxed{c' = s \text{ et } s' = c}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $s'(x) = c(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ donc $s'(x) > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$s'(x)$		$+$	
s	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$s(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $e^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par imparité $s(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $c'(x) = s(x)$.

On déduit le signe de s donc de c' par la question précédente puisque $s(0) = 0$ et s est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Les limites aux bornes se calculent par opérations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
c	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $c(x) \geq 1$.

4°) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) = s(x) - x$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = c(x) - 1$.

Or $c(x) \geq 1$ par la question précédente donc u est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

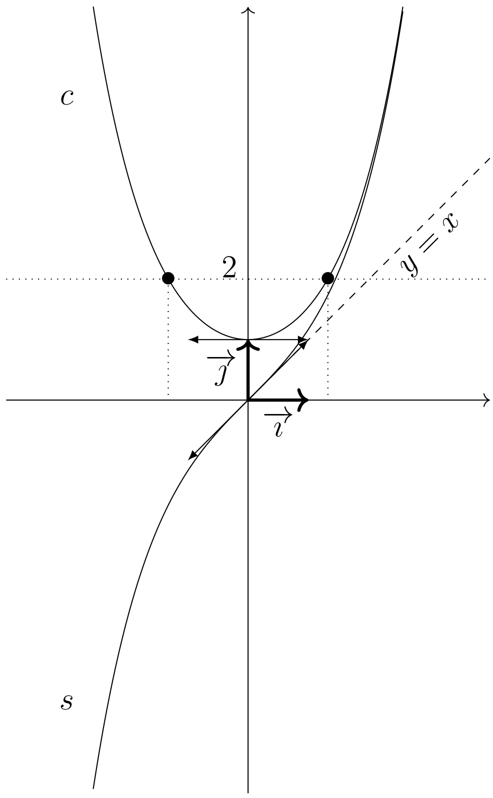
Comme $u(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) \geq 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ s(x) \geq x}$.

5°) On sait : $\forall x \in \mathbb{R}$, $c(x) > s(x)$.

On peut aussi remarquer que $c(x) - s(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On précise les tangentes à l'origine et on respecte la parité de c et l'imparité de s.



6°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
c(x)=2 &\iff \frac{e^x+e^{-x}}{2}=2\\
&\iff e^x+e^{-x}=4\\
&\iff e^x+\frac{1}{e^x}=4\\
&\iff \frac{e^{2x}+1-4e^x}{e^x}=0\\
&\iff e^{2x}-4e^x+1=0\\
&\iff X^2-4X+1=0 \text{ en posant } X=e^x
\end{aligned}
$$

Le discriminant du trinôme en X est $\Delta = 4^2-4=12=(2\sqrt{3})^2$.

Les solutions en X sont : $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
c(x)=2 &\iff X=2+\sqrt{3} \text{ ou } X=2-\sqrt{3}\\
&\iff e^x=2+\sqrt{3} \text{ ou } e^x=2-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$2+\sqrt{3}>0$ et aussi $2-\sqrt{3}>0$ car $4>3$ donc $2>\sqrt{3}$.
Ainsi, par bijectivité de exp, $c(x)=2 \iff x=\ln(2+\sqrt{3})$ ou $x=\ln(2-\sqrt{3})$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } c(x)=2 \text{ est : } \{\ln(2-\sqrt{3}),\ln(2+\sqrt{3})\}}$.

Remarque : Par parité de c, ces solutions sont opposées.

7°) $\mathbb{R}$ est un intervalle, s est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, s réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} s(x), \lim\limits_{x\to+\infty} s(x)\right[$ i.e. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{s \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

8°) *Quelques formule algébriques*

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
s(x)^2+1 &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1 \\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2e^xe^{-x}}{4}+1 \\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2+4}{4} \\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} \\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{s(x)^2+1=c(x)^2}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2c(x)s(x) &= 2\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^x-e^{-x}}{2} \\
&= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{2} \\
&= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{2c(x)s(x)=s(2x)}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

On constate que, pour tout $X \in \mathbb{R}, c(X)+s(X) = \dfrac{e^X+e^{-X}}{2} + \dfrac{e^X-e^{-X}}{2} = e^X$. Donc,

$$\begin{aligned}
c(nx)+s(nx) &= e^{nx} \\
&= (e^x)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{c(nx)+s(nx)=(c(x)+s(x))^n}$$

Partie 2 : Étude d'une autre fonction

9°) Justifions que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}+x>0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2+1>x^2$ donc $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$.
Or, $\sqrt{x^2}=|x|$ et $|x| \geq -x$ donc $\sqrt{x^2+1}>-x$ i.e. $\sqrt{x^2+1}+x>0$.
$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

10°) *Quelques résultats sur la fonction f :*

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(-x)=-f(x)$. Cela revient à : $f(-x)+f(x)=0$.

$$\begin{aligned}
f(-x)+f(x) &= \ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x) \\
&= \ln\Big((\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)\Big) \\
&= \ln(x^2+1-x^2) \\
&= \ln 1 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

b) La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; et $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition de fonctions dérivables, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme avec $x \mapsto x$ et composition avec ln, fonctions qui sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

11°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \circ s(x) &= f(s(x)) \\ &= \ln(\sqrt{s(x)^2+1}+s(x)) \\ &= \ln(\sqrt{c(x)^2}+s(x)) && \text{par } 8a \\ &= \ln(|c(x)|+s(x)) \\ &= \ln(c(x)+s(x)) && \text{car } c(x) \geq 0 \\ &= \ln(e^x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f \circ s(x) = x}$$

12°) *Une équation*

a) s est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par 7. $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ donc $\sqrt{3}$ admet un unique antécédent x_0 dans $\mathbb{R}$. Cela revient à :

$\boxed{\text{L'équation } s(x) = \sqrt{3} \text{ admet une unique solution réelle } x_0.}$

b) $s(x_0) = \sqrt{3}$ donc $f(s(x_0)) = f(\sqrt{3})$.

Or $f \circ s(x_0) = x_0$ par 11 donc $x_0 = f(\sqrt{3})$.

Ainsi, $x_0 = \ln(\sqrt{3+1}+\sqrt{3})$ i.e. $\boxed{x_0 = \ln(2+\sqrt{3})}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} c(x) = 2 &\iff c(x)^2 = 4 && \text{car } c(x) \geq 0 \\ &\iff s(x)^2+1 = 4 && \text{par 8a} \\ &\iff s(x)^2 = 3 \\ &\iff s(x) = -\sqrt{3} \text{ ou } s(x) = \sqrt{3} \\ &\iff s(-x) = \sqrt{3} \text{ ou } s(x) = \sqrt{3} && \text{par imparité de } s \\ &\iff -x = x_0 \text{ ou } x = x_0 && \text{par 12a} \\ &\iff x = -\ln(2+\sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } c(x) = 2 \text{ est : } \{-\ln(2+\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})\}}$.