Devoir surveillé 1.

Samedi 23 septembre 2023, de 7h45 à 11h45.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d' $\boxed{\textit{encadrer}}$ *ou de souligner les résultats, et de laisser une* ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $(I_1) : \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3 - 2x} \leq 1 - x$.

2°) $(I_2) : x - \dfrac{3}{2} \leq \sqrt{x^2 - 2x}$.

3°) $(I_3) : (\ln x)^2 + 3\ln x + 2 \geq 0$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$.
Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}.$$

1°) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer la dérivée de f.

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geq 0$.

3°) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4°) En déduire que :

$$\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right)\ln\left(\frac{b}{a} + 1\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1°) Calculer, pour tout x réel, $f(x) + f(-x)$.
Que peut-on en déduire pour le point $A(0, 1 + \ln(4))$?

2°) Dresser le tableau de variations de la fonction f, sans oublier le calcul des limites aux bornes.

3°) Déterminer les éventuelles asymptotes de la fonction, sans oublier de préciser la position de la courbe par rapport à ses éventuelles asymptotes.

4°) Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}$.
On pourra utiliser $\ln 4 \approx 1,4$

<u>Problème</u>

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Partie 1 : Étude des fonctions c et s

1°) Étudier les parités de c et s.

2°) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ c(x) > s(x)$.

3°) **a)** Justifier que c et s sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées. Que remarque-t-on ?

b) Dresser le tableau de variations de s.

c) En déduire le tableau de variations de c.

4°) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $s(x) \geq x$.

5°) Donner l'allure des courbes c et s dans un même repère orthonormé.

6°) Résoudre l'équation $c(x) = 2$.
Représenter graphiquement les solutions de l'équation sur le dessin de la question précédente.

7°) Justifier que s est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

8°) *Quelques formule algébriques*
Les 3 questions suivantes sont indépendantes.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ c(x)^2 = s(x)^2 + 1$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ s(2x) = 2c(x)s(x)$.

c) Sans faire de récurrence, justifier que, pour tous $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(c(x)+s(x))^n = c(nx)+s(nx)$.

Partie 2 : Étude d'une autre fonction

On note $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

9°) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

10°) *Quelques résultats sur la fonction f :*

a) Montrer que f est impaire.

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

11°) En utilisant la question 8a, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ s(x) = x$.

12°) *Une équation*

a) Justifier que l'équation $s(x) = \sqrt{3}$ admet une unique solution réelle. On la notera x_0.

b) En utilisant la question 11, déterminer x_0.

c) Retrouver les solutions de l'équation $c(x) = 2$.

$* * * * *$ FIN $* * * * *$