Correction du devoir surveillé 8.

Exercice 1

1°) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $e^{-t} < 1$ donc $1 - e^{-t} > 0$ donc $t + 1 - e^{-t} > 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

2°) $t + 1 - e^{-t} \underset{t\to 0}{=} t + 1 - (1 - t + o(t)) \underset{t\to 0}{=} 2t + o(t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$. Ainsi, $\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2t}}$.

3°) a) Par somme et quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$, $f'(t) = -\dfrac{1 + e^{-t}}{(t + 1 - e^{-t})^2} < 0$ puisque $e^{-t} > 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et elle y est continue. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$.

Comme $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2t}$, $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, et par ailleurs $f(t) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n \in \mathbb{R}_+^*$ donc n a un unique antécédent par f, autrement dit : $\boxed{\exists\, !\, x_n \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } f(x_n) = n}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n < n+1$ i.e. $f(x_n) < f(x_{n+1})$. Si on avait $x_n \leq x_{n+1}$, comme f est décroissante, on aurait $f(x_n) \geq f(x_{n+1})$, absurde. Donc $x_n > x_{n+1}$.

Ainsi, $\boxed{(x_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

c) La suite (x_n) est décroissante et elle est minorée (par 0), donc $\boxed{\text{elle converge}}$. Notons ℓ sa limite.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 0$, on a $\ell \geq 0$.

Si on avait $\ell > 0$, alors f serait définie et continue en ℓ, et on aurait $f(x_n) \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, i.e. $n \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell) \in \mathbb{R}$: absurde.

Donc $\boxed{\ell = 0}$.

d) On sait que $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2t}$, et $x_n \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x_n) \underset{n\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x_n}$.

Cela s'écrit aussi $n \underset{n\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x_n}$, d'où $\boxed{x_n \underset{n\to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$.

4°) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc sur le segment $[x, 2x]$ qui est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc $F(x)$ existe.

$\boxed{F \text{ existe sur } \mathbb{R}_+^*}$.

5°) Étude en $+\infty$

a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$0 < e^{-t} < 1$ donc $-1 < -e^{-t} < 0$. Donc, $t < t + 1 - e^{-t} < t + 1$.

Tous les termes sont strictement positifs donc $\boxed{\frac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}}$.

b) Soit $x > 0$. On a bien $x < 2x$, et pour tout $t \in [x, 2x]$, $\dfrac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t}$.

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[x, 2x]$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(|t+1|)]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$,

et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(|t|)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$.

$\dfrac{2x+1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2$ i.e. $\dfrac{2x+1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, donc $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$ par continuité de ln.

Par le théorème d'encadrement, $\boxed{F(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2)}$.

6°) Sens de variations

a) f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une primitive H sur $\mathbb{R}_+^*$.
H est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors : $\forall x>0, F(x) = H(2x) - H(x)$.
Donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence et composée de fonctions de classe C^1.
De plus, on a pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2H'(2x) - H'(x) = 2f(2x) - f(x)\\
&= \frac{2}{2x+1-e^{-2x}} - \frac{1}{x+1-e^{-x}}\\
&= \frac{2x+2-2e^{-x}-2x-1+e^{-2x}}{(2x+1-e^{-2x})(x+1-e^{-x})}\\
&= \frac{1-2e^{-x}+e^{-2x}}{(2x+1-e^{-2x})(x+1-e^{-x})}\\
F'(x) &= \frac{(1-e^{-x})^2}{(2x+1-e^{-2x})(x+1-e^{-x})}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x>0, F'(x) = (1-e^{-x})^2 f(2x)f(x)}$.

b) $f>0$ par la question 5a et, pour tout $x>0, e^{-x}\neq 1$ donc pour tout $x>0, F'(x)>0$.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

7°) Étude de F en 0

a) On a : $e^{-t} \underset{t\to0}{=} 1 - t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
f(t) &\underset{t\to0}{=} \frac{1}{t+1-1+t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)} \underset{t\to0}{=} \frac{1}{2t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)}\\
&\underset{t\to0}{=} \frac{1}{2t}\,\frac{1}{1-\dfrac{t}{4}+o(t)}
\end{aligned}$$

On pose $X \underset{t\to0}{=} \dfrac{t}{4} + o(t)$. $X \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$. On a $X \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t}{4}$ donc un $o(X)$ est un $o(t)$.

$\dfrac{1}{1-X} \underset{X\to0}{=} 1 + X + o(X)$. D'où : $f(t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{2t}\left(1+\dfrac{t}{4}+o(t)\right)$ donc $\boxed{f(t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{8} + o(1)}$.

Donc $\boxed{a = \dfrac{1}{2} \text{ et } b = \dfrac{1}{8} \text{ conviennent}}$.

b) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions continues.
Par la question précédente, $g(t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{8} + o(1)$ donc $g(t) \underset{t\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{8}$.
Ainsi, g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{8}$.
$\boxed{\text{On a prolongé } g \text{ en une fonction continue sur } \mathbb{R}_+}$.

c) g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de g s'annulant en 0.
G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $G' = g$ ie pour tout $x\in\mathbb{R}_+, G'(x) = g(x)$.
Donc $G'(x) \underset{x\to0}{=} \dfrac{1}{8} + o(1)$.

Par primitivation, $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + \dfrac{x}{8} + o(x)$.

Comme $G(0) = 0$, il vient : $\boxed{G(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{8} + o(x)}$.

d) $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{2t} + g(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{1}{2}[\ln(|t|)]_x^{2x} + [G(t)]_x^{2x} \\ &= \frac{1}{2}(\ln(2x) - \ln(x)) + G(2x) - G(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{\ln 2}{2} + G(2x) - G(x)}$$

Ainsi, $F(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{2x}{8} + o(x) - \dfrac{x}{8} + o(x)$. Finalement, $\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{x}{8} + o(x)}$.

e) $F(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{x}{8} + o(x)$ donc $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\ln 2}{2}$.

On peut donc $\boxed{\text{prolonger } F \text{ par continuité en } 0}$ en posant $\boxed{F(0) = \dfrac{\ln 2}{2}}$.

Maintenant que F est définie (et continue) en 0, l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en 0 nous permet d'affirmer que $\boxed{F \text{ est dérivable en } 0}$, et grâce au coefficient de x dans ce développement limité, on obtient que $\boxed{F'(0) = \dfrac{1}{8}}$.

f) On sait déjà que F est dérivable en 0 et que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout revient à savoir si F' est continue en 0 ie $F'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0) = \dfrac{1}{8}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = (1 - e^{-x})^2 f(2x)f(x)$ par 6a.

Par 2, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ donc, puisque $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $f(2x)f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{4x}\dfrac{1}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{8x^2}$.

D'autre part, $-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$, donc $1 - e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x$, d'où $(1 - e^{-x})^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Finalement, $F'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{8}$ donc $F'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{8}$ ie $F'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0)$.

F' est donc continue en 0.

Finalement, $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

Exercice 2

1°) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus $P(Y_k = 1) = \dfrac{1}{2}$ (donc $P(Y_k = 0) = \dfrac{1}{2}$).

Donc $\boxed{Y_k \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{1}{2}}$.

$N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{N \text{ suit la loi binomiale de paramètre } n \text{ et } \frac{1}{2} : N \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}.$$

Ainsi, $\boxed{N(\Omega) = [\![0, n]\!]}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{P(N = k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{2^{n-k}} = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}}$.

2°) Il y a deux cas : soit il y a au moins un gagnant et on a alors $S = n$. Soit il n'y a aucun gagnant et on a alors $S = 0$. Donc $\boxed{S(\Omega) = \{0, n\}}$.
$S = 0$ ssi tous les joueurs sont perdants.
Autrement dit, $(S = 0) = (Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 0) \cap \cdots \cap (Y_n = 0)$.
Ainsi, $P(S = 0) = P((Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 0) \cap \cdots \cap (Y_n = 0)) = P(Y_1 = 0)P(Y_2 = 0) \dots P(Y_n = 0)$ par indépendance des Y_k.
Finalement $\boxed{P(S = 0) = \dfrac{1}{2^n}}$.

Or $P(S = n) = 1 - P(S = 0)$ donc $\boxed{P(S = n) = 1 - \dfrac{1}{2^n}}$.

$E(S) = 0 \times P(S = 0) + n \times P(S = n)$. Donc $\boxed{E(S) = n\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)}$.

3°) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ donc, par linéarité de l'espérance, $E(S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.
Les rôles de tous les joueurs étant symétriques, les X_k ont même loi donc même espérance.
Ainsi, $E(S) = nE(X_1)$. D'où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{E(X_k) = E(X_1) = 1 - \dfrac{1}{2^n}}$.

4°) Si un nouvel ami arrive, l'espérance du gain pour chaque joueur est : $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
$n + 1 > n$ donc $2^{n+1} > 2^n$ d'où $\dfrac{1}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{2^n}$ donc $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
Ainsi, $\boxed{\text{les joueurs ont intérêt à avoir un ami qui arrive dans le groupe et parie avec eux.}}$

5°) $(X_k = 0) = (Y_k = 0)$ donc $P(X_k = 0) = P(Y_k = 0)$ donc, par 1, $\boxed{P(X_k = 0) = \dfrac{1}{2}}$.

6°) **a)** Sachant que $(Y_k = 1)$, le joueur numéro k a gagné, $N - 1$ est donc le nombre de gagnants en ne comptant par le joueur k :
$N - 1 = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} Y_i$: somme de $n - 1$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Donc, $\boxed{\text{sachant que } (Y_k = 1),\ N - 1 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n - 1 \text{ et } \dfrac{1}{2}}$.

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
$\left(X_k = \dfrac{n}{i}\right) = (Y_k = 1) \cap (N = i)$ donc $P\left(X_k = \dfrac{n}{i}\right) = P(Y_k = 1) \cap (N = i))$.
Par la formule des probabilités composées, $P\left(X_k = \dfrac{n}{i}\right) = P(Y_k = 1)P_{(Y_k=1)}(N = i)$.
$P(Y_k = 1) = \dfrac{1}{2}$.
De plus, $P_{(Y_k=1)}(N = i) = P_{(Y_k=1)}(N - 1 = i - 1) = \dbinom{n-1}{i-1}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ par la question précédente.

Donc, $\boxed{P\left(X_k = \dfrac{n}{i}\right) = \dbinom{n-1}{i-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

7°) $X_k(\Omega) = \left\{0, n, \dfrac{n}{2}, \dots, \dfrac{n}{n-1}, 1\right\}$ donc

$$\begin{aligned}
E(X_k) &= 0 \times P(X_k = 0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} P(X_k = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i 1^{n-i} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}((1+1)^n - 1) \qquad \text{par la formule du binôme}$$

$$\boxed{E(X_k) = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

8°) $(X_k = n) \cap (X_j = n) = \varnothing$ donc $P((X_k = n) \cap (X_j = n)) = 0$.
En revanche, $P(X_k = n)P(X_j = n) \neq 0$ donc $P((X_k = n) \cap (X_k = n)) \neq P(X_k = n)P(X_j = n)$.
Donc, $\boxed{\text{les variables } X_k \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

9°) a) Remarquons d'abord que $(T = 0) = \bigcap_{k=1}^{n}(Z_k = 0)$.

Sachant $(S = 0)$ i.e. sachant qu'il n'y a eu aucun gagnant au premier match alors il n'y a aucun argent misé et donc aucune somme d'argent à gagner : peu importe les paris faits, tous les Z_k sont nuls et on a nécessairement $T = 0$. Ainsi $\boxed{P_{(S=0)}(T = 0) = 1}$.

Sachant $(S = n)$, il y a de l'argent en jeu, donc pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, Z_k est nul si et seulement si le joueur k a misé sur la mauvaise équipe ; on en tire que les événements $(Z_k = 0)$ sachant $(S = n)$ sont indépendants et qu'ils sont tous de probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi :

$$P_{(S=n)}((Z_1 = 0) \cap \cdots \cap (Z_n = 0)) = P_{(S=n)}(Z_1 = 0) \dots P_{(S=n)}(Z_n = 0) = \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}$$

$$\text{i.e. } \boxed{P_{(S=n)}(T = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

b) $((S = 0), (S = n))$ forment un système complet d'événements donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(T = 0) = P(S = 0)P_{(S=0)}(T = 0) + P(S = n)P_{(S=n)}(T = 0)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^n} \qquad \text{par 2 et 9a}$$

$$\boxed{P(T = 0) = \frac{1}{2^n}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)}$$

$T(\Omega) = \{0, n\}$ donc $P(T = n) = 1 - P(T = 0) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2n}}$

Or $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2n}}$ donc $\boxed{P(T = n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2}$.

c) $E(T) = 0 \times P(T = 0) + n \times P(T = n)$ donc $\boxed{E(T) = n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2}$.

$V(T) = E(T^2) - E(T)^2$.

Par la formule du transfert, $E(T^2) = 0^2 \times P(T = 0) + n^2 \times P(T = n) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$.

$$V(T) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 - n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^4$$

$$= n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2\right)$$

$$\boxed{V(T) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n}}\right)}$$

10°) $T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ donc, par linéarité de l'espérance, $E(T) = \sum_{k=1}^{n} E(Z_k)$.
Par symétrie des rôles des joueurs, les Z_k ont toutes même loi donc même espérance.
Ainsi, $E(T) = nE(Z_1)$. Donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{E(Z_k) = E(Z_1) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2}$.

Exercice 3

1°)
- Soit $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
  $\deg(Q(1-X)) = \deg(Q) \times \deg(1-X) = \deg(Q) \leq 2n+1$, donc $Q(1-X) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
  Or $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ donc il est stable par combinaison linéaire, donc $u_n(Q) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
- Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_n(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2}\left((\lambda P + Q)(1-X) + (\lambda P + Q)(X)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda P(1-X) + Q(1-X) + \lambda P(X) + Q(X)\right) \\ &= \lambda \frac{1}{2}\left(P(1-X) + P(X)\right) + \frac{1}{2}\left(Q(1-X) + Q(X)\right) = \lambda u_n(P) + u_n(Q) \end{aligned}$$

  Ainsi u_n est linéaire.
- En conclusion, $\boxed{u_n \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}_{2n+1}[X]}$.

2°) Pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n+1\}$, $\deg(P_k) = k$.
$\mathcal{B}$ est constituée de $2n+2$ polynômes de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, et justement $\dim(\mathbb{R}_{2n+1}[X]) = 2n+2$. Comme ces polynômes sont non nuls de de degrés deux à deux distincts, ils forment par ailleurs une famille libre de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_{2n+1}[X]}$.

3°) Soit $k \in \{0, \ldots, 2n+1\}$,

$$\begin{aligned} u_n(P_k) &= \frac{1}{2}\left(\left((1-X) - \frac{1}{2}\right)^k + \left(X - \frac{1}{2}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - X\right)^k + \left(X - \frac{1}{2}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((-1)^k P_k + P_k\right) = \frac{\left((-1)^k + 1\right)}{2} P_k \end{aligned}$$

Or, si k est pair, $(-1)^k + 1 = 2$, donc $\boxed{u_n(P_k) = P_k \text{ pour } k \text{ pair}}$, et si k est impair, $(-1)^k + 1 = 0$, donc $\boxed{u_n(P_k) = 0 \text{ pour } k \text{ impair}}$.

4°) Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u_n) &= \mathrm{Vect}\left(u_n(P_0), u_n(P_1), u_n(P_2), u_n(P_3), \ldots, u_n(P_{2n}), u_n(P_{2n+1})\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(P_0, 0, P_2, 0, \ldots, P_{2n}, 0\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(P_0, P_2, \ldots, P_{2n}\right) \end{aligned}$$

Comme $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est extraite de $\mathcal{B}$ qui est libre, cette famille est libre. Comme elle est génératrice de $\mathrm{Im}(u_n)$, $\boxed{(P_0, P_2, \ldots, P_{2n}) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u_n).}$

5°) Comme la base de $\mathrm{Im}(u_n)$ obtenue possède $n+1$ vecteurs, on en tire que $\dim(\mathrm{Im}(u_n)) = n+1$.
Or, par le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}_{2n+1}[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(u_n)) + \dim(\mathrm{Im}(u_n))$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(u_n)) = 2n+2-(n+1) = n+1$.
$(P_1, P_3, \ldots, P_{2n+1})$ est une famille libre car extraite de $\mathcal{B}$ qui est libre, et par la question précédente, ses éléments sont dans $\mathrm{Ker}(u_n)$. Comme elle est composée de $n+1$ vecteurs et que $n+1 = \dim(\mathrm{Ker}(u_n))$, $\boxed{(P_1, P_3, \ldots, P_{2n+1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u_n).}$

6°) Pour tout $k \in \{0, 2, \ldots, 2n\}$, $u_n \circ u_n(P_k) = u_n\left(u_n(P_k)\right) = u_n(P_k)$, et pour tout $k \in \{1, 3, \ldots, 2n+1\}$, $u_n \circ u_n(P_k) = u_n\left(u_n(P_k)\right) = u_n(0) = 0$ par linéarité de u_n, ce qui est bien égal à $u_n(P_k)$.

Ainsi, pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n+1\}$, $u_n \circ u_n(P_k) = u_n(P_k)$.

$u_n \circ u_n$ et u_n sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ qui coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, donc ils sont égaux : $u_n \circ u_n = u_n$. Comme u_n est linéaire, on en déduit que $\boxed{u_n \text{ est une projection}}$.

7°)
- Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, tel qu'il existe un polynôme impair tel que $Q = R\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$. Calculons :

$$\begin{aligned}
u(Q) &= \frac{1}{2}\left(R\left((1-X) - \frac{1}{2}\right) + R\left(X - \frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(R\left(\frac{1}{2} - X\right) + R\left(X - \frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-R\left(X - \frac{1}{2}\right) + R\left(X - \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{car } R \text{ impair}\\
&= 0
\end{aligned}$$

  Ainsi, $Q \in \mathrm{Ker}(u)$.
  On a donc $\left\{R\left(X - \frac{1}{2}\right) \ / \ R \in \mathbb{R}[X],\ R \text{ polynôme impair}\right\} \subset \mathrm{Ker}(u)$.
- Réciproquement, supposons $Q \in \mathrm{Ker}(u)$.
  Il existe un entier n tel que $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, et alors $u(Q) = u_n(Q)$ i.e. $u_n(Q) = 0$.
  On a alors $Q \in \mathrm{Ker}(u_n) = \mathrm{Vect}(P_1, P_3, \ldots, P_{2n+1})$. Ainsi, il existe des réels $a_1, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ tels que $Q = a_1\left(X - \frac{1}{2}\right) + a_3\left(X - \frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + a_{2n+1}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2n+1}$.
  En posant $R = a_1X + a_3X^3 + \cdots + a_{2n+1}X^{2n+1}$, R est un polynôme impair et $Q = R\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.
  On a donc l'inclusion réciproque.
- Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \left\{R\left(X - \dfrac{1}{2}\right) \ / \ R \in \mathbb{R}[X],\ R \text{ polynôme impair}\right\}}$.

8°) **a)** Par $(*)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\sin t) = 1 - P(\cos t)$.
Utilisons cette égalité en $-t$: comme $\sin(-t) = -\sin(t)$ et $\cos(-t) = \cos(t)$, on obtient : $P(-\sin t) = 1 - P(\cos t)$.
Ainsi, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ P(-\sin t) = P(\sin t)}$.

b) Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\sin(t)$ décrit $[-1, 1]$, donc on a : $\forall x \in [-1, 1]$, $P(-x) = P(x)$, i.e. $P(-x) - P(x) = 0$.
Ainsi, tous les réels de $[-1, 1]$ sont racines du polynôme $P(-X) - P(X)$, ce qui fait une infinité de racines. Donc il s'agit du polynôme nul : $P(-X) - P(X) = 0$ i.e. $P(-X) = P(X)$, $\boxed{P \text{ est un polynôme pair.}}$

9°)

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (*) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ P(\cos t) + P(\sin t) = 1\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Q(\cos^2 t) + Q(\sin^2 t) = 1\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ Q(1 - \sin^2 t) + Q(\sin^2 t) = 1
\end{aligned}$$

- Si Q vérifie $u(Q) = \dfrac{1}{2}$, alors $2u(Q) = 1$ i.e. $Q(1 - X) + Q(X) = 1$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$. En évaluant en $\sin^2 t$, on obtient bien $Q(1 - \sin^2 t) + Q(\sin^2 t) = 1$.
  Ainsi, $u(Q) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ Q(1 - \sin^2 t) + Q(\sin^2 t) = 1$.
- Réciproquement, supposons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(1-\sin^2 t) + Q(\sin^2 t) = 1$. Comme $\sin^2 t$ décrit $[0, 1]$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $x \in [0, 1]$, $Q(1 - x) + Q(x) - 1 = 0$. Ainsi, le polynôme $Q(1-X) + Q(X) - 1$ a une infinité de racines (tous les réels de $[0, 1]$) : c'est le polynôme nul. Cela signifie bien que $u(Q) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, on a montré : P solution de $(*)$ $\iff u(Q) = \dfrac{1}{2}$.

10°) D'après les questions 7 et 8, l'ensemble des polynômes réels P vérifiant $(*)$ sera :

$$\left\{ Q(X^2) \ / \ Q \in \mathbb{R}[X],\ u(Q) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Comme $u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} u(Q) = \frac{1}{2} &\iff u(Q) - u\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff u\left(Q - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{par linéarité de } u \\ &\iff Q - \frac{1}{2} \in \mathrm{Ker}(u) \\ &\iff \exists\, R \in \mathbb{R}[X] \text{ impair},\ Q - \frac{1}{2} = R\left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &\iff \exists\, R \in \mathbb{R}[X] \text{ impair},\ Q = \frac{1}{2} + R\left(X - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc bien que l'ensemble des polynômes réels P vérifiant $(*)$ est

$$\boxed{\left\{ \frac{1}{2} + R\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) \ \ / \ R \in \mathbb{R}[X],\ R \text{ polynôme impair} \right\}}$$

11°) En tant que fonction polynomiale, P_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_k'(x) = k\left(x - \frac{1}{2}\right)^{k-1}$ (car $k > 0$), donc :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) P_k'(x) - kP_k(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) k \left(x - \frac{1}{2}\right)^{k-1} - k\left(x - \frac{1}{2}\right)^{k} = 0.$$

Ainsi, $\boxed{x \mapsto P_k(x) \text{ est solution de } (E_k) \text{ sur } \mathbb{R}}$.

12°) Sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $(E_k) \iff y'(x) - \dfrac{k}{x - \frac{1}{2}} y(x) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{k}{x - \frac{1}{2}}$ sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est $x \mapsto -k\ln\left(\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$. Or $x - \frac{1}{2} > 0$ si $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ donc une primitive est $x \mapsto -k\ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$ sur cet intervalle.

On en tire que les solutions de (E_k) sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \exp\left(+k\ln\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, autrement dit les $\boxed{x \mapsto \lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)^k \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

13°) $x \mapsto P_k(x)$ est une fonction polynomiale, elle est solution de (E_k) sur $\mathbb{R}$, et $P_k\left(\frac{3}{2}\right) = 1^k = 1$, donc elle est bien solution de $(*)$.

Réciproquement, soit Q un polynôme tel que $x \mapsto Q(x)$ soit solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

Alors cette fonction est en particulier solution de (E_k) sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc il existe un réel λ tel que pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $Q(x) = \lambda P_k(x)$.

Comme $Q\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ et $P_k\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, on a $1 = \lambda$.

Ainsi pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $Q(x) - P_k(x) = 0$, ce qui signifie que tous les réels de $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ sont racines du polynôme $Q - P_k$. Cela fait une infinité de racines, donc $Q - P_k$ est le polynôme nul. Ainsi, $Q = P_k$.

On a bien montré que $\boxed{x \mapsto P_k(x) \text{ est l'unique fonction polynomiale qui soit solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (*)}$.