Devoir surveillé 8.

Vendredi 13 juin 2025, de 13h30 à 17h30.

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le sujet est composé de 3 exercices.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, f désigne l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{t+1-e^{-t}} \end{array}$$

Partie 1 : Étude de f

1°) Justifier que f est bien définie.

2°) Donner un équivalent de f en 0.

3°) Étude d'une suite (x_n)

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel strictement positif x_n tel que $f(x_n) = n$.

b) Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante.

c) Justifier que (x_n) converge et déterminer sa limite.

d) Déterminer un équivalent simple de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 2 : Étude d'une fonction F

On désigne par F la fonction définie par : $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4°) Montrer que F existe bien sur $\mathbb{R}_+^*$.

5°) Étude en $+\infty$

a) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t}$.

b) En déduire un encadrement de F puis la limite de F en $+\infty$.

6°) Sens de variations

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que :

$$\forall x > 0,\ F'(x) = (1-e^{-x})^2 f(2x) f(x)$$

b) En déduire les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

7°) Étude de F en 0

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que : $f(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{a}{t} + b + o(1)$.

b) On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - \dfrac{a}{t} \end{array}$.

Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Justifier l'existence de l'unique primitive G de g qui s'annule en 0.
Donner le développement limité de G en 0 à l'ordre 1.

d) Exprimer F en fonction de G et en déduire que : $F(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{x}{8} + o(x)$.

e) Montrer que l'on peut prolonger F par continuité en 0. Préciser $F(0)$.
Justifier que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

f) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2

Cet exercice comporte trois parties qui sont en grande partie indépendantes. Les notions et variables étudiées dans la partie 1 sont utilisées dans les parties 2 et 3.

Un groupe de $n \geqslant 3$ amis parie sur l'issue d'un match opposant deux équipes de rugby : l'équipe A et l'équipe B. On fait les hypothèses suivantes :

- Chaque équipe a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner le match.
- Le match n'est pas truqué : son issue est indépendante des paris des joueurs.
- Chaque joueur parie 1 euro.
- Chaque joueur effectue son pari indépendamment des autres joueurs.
- Un joueur est déclaré gagnant s'il a parié sur la bonne issue du match.
- L'ensemble des gagnants se partage équitablement la mise totale de n euros.
- S'il n'y a aucun gagnant, la mise totale de n euros est reversée au club de rugby local.

Dans l'ensemble de l'exercice, on appelle gain d'un joueur la somme qu'il reçoit à l'issue du match.
S'il y a $m \geqslant 1$ joueurs gagnants, le gain de chacun de ces joueurs est de $\dfrac{n}{m}$.

Partie 1 : calcul de l'espérance du gain pour un joueur

On numérote les joueurs de 1 à n et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

- Y_k la variable qui vaut 1 si le joueur k a gagné et 0 sinon,
- X_k le gain, en euros, du joueur k à l'issue du match.

Enfin, on note :

- $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ le nombre de gagnants,
- $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ la somme des gains, en euros, des joueurs.

1°) Reconnaître la loi de Y_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ainsi que celle de N. On explicitera les probabilités associées à ces lois.

2°) Expliquer pourquoi $S(\Omega) = \{0, n\}$ puis expliciter la loi de S et calculer $E(S)$.

3°) En déduire la valeur de $E(X_k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (le calcul de la loi de X_k n'est pas nécessaire pour cette question).

4°) Un nouvel ami arrive dans le groupe, les joueurs ont-ils intérêt à ce qu'il parie avec eux ?

Partie 2 : étude de la variable X_k

On fixe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on étudie la variable X_k.

5°) Déterminer $P(X_k = 0)$.

6°) **a)** Quelle est la loi conditionnelle de la variable $N - 1$ sachant l'événement $(Y_k = 1)$?

b) En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n}$$

On pourra utiliser les événements $\left(X_k = \dfrac{n}{i}\right)$, $(Y_k = 1)$ et $(N = i)$.

7°) Retrouver la valeur de $E(X_k)$ calculée dans la partie précédente.

8°) On considère un autre joueur $j \neq k$. Les variables X_j et X_k sont-elles indépendantes ?

Partie 3 : le match retour

Après ce premier pari, le groupe d'amis se retrouve et parie sur un nouveau match entre les deux équipes. On suppose que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier. Chaque joueur parie alors son gain du premier match sur le second, c'est-à-dire que le joueur k parie X_k euros. Ainsi, même un joueur n'ayant rien gagné au premier pari ($X_k = 0$) participe au deuxième pari et peut faire partie des gagnants de ce deuxième pari. Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire S euros (dans le cas où il n'y a aucun gagnant, la mise totale revient au club local, comme au premier pari).
On note :

- Z_k le gain du joueur k lors de ce deuxième pari,
- M le nombre de gagnants du deuxième pari,
- $T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ la somme des gains du deuxième pari.

9°) a) Justifier que $P_{(S=0)}(T = 0) = 1$ et donner la valeur de $P_{(S=n)}(T = 0)$.

b) En déduire que

$$P(T = 0) = \frac{1}{2^n}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad P(T = n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$

c) Calculer l'espérance et la variance de T.

10°) En utilisant la variable T, calculer la valeur de $E(Z_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 3

La partie 3 est largement indépendante du reste de l'exercice.

Partie 1 : Étude d'un endomorphisme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'application définie sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X],\ u_n(Q) = \frac{1}{2}\left(Q(1 - X) + Q(X)\right)$$

(où $Q(1 - X)$ désigne une composition de polynômes et non un produit).

On pose également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k$.

Dans les questions 1 à 6, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1°) Montrer que u_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

2°) Justifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

3°) Déterminer les images des polynômes P_k par u_n, pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n + 1\}$.

4°) En déduire une base de $\mathrm{Im}(u_n)$.

5°) Montrer que $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n+1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(u_n)$.

6°) *Le résultat de cette question ne sert pas dans la suite.*
Montrer que u_n est une projection.

On définit maintenant $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ u(Q) = \frac{1}{2}\left(Q(1 - X) + Q(X)\right).$$

De même que pour les applications u_n, u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (ne pas le montrer).

7°) À l'aide des applications u_n, montrer que :

$$\mathrm{Ker}(u) = \left\{ R\left(X - \frac{1}{2}\right)\ /\ R \in \mathbb{R}[X],\ R \text{ polynôme impair} \right\}.$$

Indication : on raisonnera par double inclusion.

Partie 2 : Un ensemble de polynômes

Le but de cette partie est de trouver l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(*) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ P(\cos t) + P(\sin t) = 1.$$

8°) Dans cette question, on suppose que $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $(*)$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(-\sin t) = P(\sin t)$.

b) En déduire que P est un polynôme pair.

Ainsi, si P est solution, P s'écrit $P(X) = Q(X^2)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

9°) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On pose $P = Q(X^2)$.

Montrer que P est solution de $(*)$ si et seulement si $u(Q) = \dfrac{1}{2}$.

10°) Déduire des questions précédentes que l'ensemble des polynômes réels P vérifiant $(*)$ est

$$\left\{ \frac{1}{2} + R\left(X^2 - \frac{1}{2}\right) \ / \ R \in \mathbb{R}[X], \ R \text{ polynôme impair} \right\}.$$

Partie 3 : Une caractérisation des polynômes P_k de la première partie

On fixe $k \in \mathbb{N}^*$, et on pose (E_k) l'équation différentielle suivante :

$$(E_k) \ : \ \left(x - \frac{1}{2}\right) y' - ky = 0.$$

11°) Vérifier que la fonction $x \mapsto P_k(x)$ est solution de (E_k) sur $\mathbb{R}$.

12°) Résoudre (E_k) sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

13°) En déduire que $x \mapsto P_k(x)$ est l'unique fonction polynomiale qui soit solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$(*) \ : \ \left\{ \begin{array}{l} \left(x - \frac{1}{2}\right) y' - ky = 0 \\ y\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \end{array} \right.$$

Remarque : pour $k \geq 2$, il existe des solution de $(*)$ sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des fonctions polynomiales.